

Химикотехнологичен и металургичен университет

София

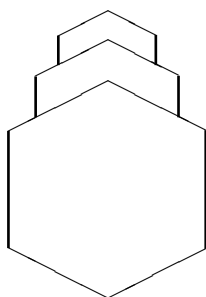
ЗАПИСКИ

ПО

ФИЗИКА

I – ЧАСТ

С. Недев



катедра "ФИЗИКА"

<<<<<< >>>>>>

Това ръководство е написано в помощ на студентите редовно и задочно обучение изучаващи физика. То съдържа материали от механика, вълни, термодинамика, електричество, магнетизъм и светлина.

доц. Светлозар Недев
E-mail: nedev@uctm.edu

PHYSICS

part I

*mechanics, harmonic oscillations & waves
kinetic theory, electricity & magnetism, light*

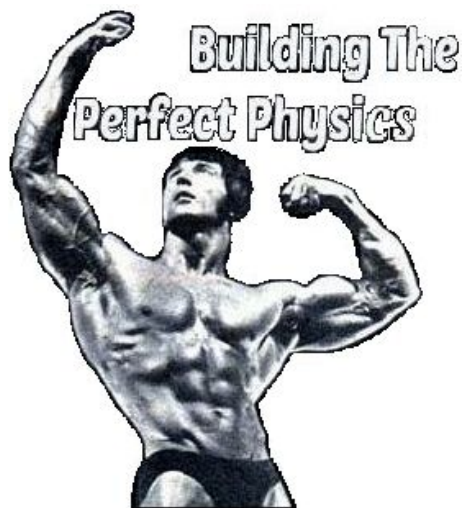
MANUAL

by

S. Nedev Ph.D.

Department of Physics

UCTM, Sofia



Съдържание

1	Основи на механиката	1
1.1	Ролята на физиката като фундаментална наука	1
1.1.1	Място на физиката в естествознанието	1
1.1.2	Физика и псевдонаука	2
1.1.3	Модели във физиката	5
1.2	Кинематика	7
1.2.1	Закон за движение, скорост и ускорение	7
1.2.2	Нормално и тангенциално ускорение	8
1.3	Динамика на материална точка	9
1.3.1	Принципи на динамиката	9
1.3.2	Сили	10
1.3.3	Неинерциални отправни системи	11
1.3.4	Закон за запазване на импулса	12
1.4	Работа и енергия	13
1.4.1	Работа на сила, Мощност	14
1.4.2	Работа на силите на тежестта	14
1.4.3	Кинетична енергия	15
1.4.4	Потенциална енергия	15
1.4.5	Закон за запазване на енергията	17
1.4.6	Равновесие	17
1.4.7	Закони за запазване и симетрия	19
1.4.8	Други формулировки на механиката	20
1.5	Специална теория на относителността	21
1.5.1	Механичен принцип на относителността	21
1.5.2	Принцип на относителността	23
1.5.3	Лоренцови трансформации	25
1.5.4	Елементи на релативистката динамика	26
2	Трептения и вълни	29
2.1	Хармонични трептения	29
2.1.1	Обща характеристика на хармоничното трептение	29
2.1.2	Примери за хармонични трептения	30
2.2	Представяне на трептенията	31
2.2.1	Векторно представяне на хармоничните трептения	31
2.2.2	Комплексно представяне на хармоничните трептения	31
2.2.3	Събиране на хармонични трептения	32
2.2.4	Затихващи трептения	33
2.2.5	Принудени трептения	34
2.3	Вълни	35
2.3.1	Общо описание на вълните	35
2.3.2	Уравнение на плоска вълна	36
2.4	Вълново уравнение	37

2.4.1	Вълново уравнение, сферична и цилиндрична вълна	38
2.4.2	Интерференция на вълни	39
2.4.3	Дифракция	40
3	Молекулна физика	41
3.1	Термодинамика	41
3.1.1	Статистически и термодинамичен метод	41
3.1.2	Термодинамични системи и процеси	42
3.1.3	Принципи на термодинамиката	43
3.1.4	Закони на идеалните газове	44
3.1.5	Основно уравнение на кинетичната теория на газовете	46
3.1.6	Вътрешна енергия на идеален газ	48
3.2	Топлоемност	49
3.2.1	Топлоемност на идеалния газ	49
3.3	Функция на разпределението	50
3.3.1	Закон на Максвел за разпределението на молекулите по скорости	50
3.3.2	Барометрична формула, разпределение на Болцман, закон на Максвел – Болцман	51
3.4	Статистическа природа на ентропията	52
3.5	Явления на пренасяне	54
3.5.1	Среден свободен пробег	54
3.5.2	Вискозитет на газовете	55
3.5.3	Топлопроводност	57
3.5.4	Дифузия	58
4	Флуиди	59
4.1	Движение на флуид	59
4.1.1	Уравнение за непрекъснатост на струята	59
4.1.2	Уравнение на Бернули	60
4.1.3	Реални флуиди	61
4.2	Повърхностно напрежение	63
5	Електричество и магнетизъм	65
5.1	Електростатика	65
5.1.1	Електричен заряд, закон на Кулон	65
5.1.2	Интензитет на електрично поле, теорема на Гаус	66
5.1.3	Работа на силите на електростатичното поле, потенциал	68
5.1.4	Електрично поле на заредена безкрайна равнина.	70
5.2	Електрическо поле във веществото	71
5.2.1	Електрическо поле в метали	71
5.2.2	Електрически диполен момент	72
5.2.3	Вектор на поляризацията	73
5.2.4	Пиезоелектричен ефект	75
5.3	Магнетизъм	75
5.3.1	Електричен ток	76
5.3.2	Закон на Ом, закон на Джаул-Ленц	76

5.3.3	Магнитна индукция, закон на Био–Савар–Лаплас	77
5.3.4	Магнитно поле на прав проводник	78
5.3.5	Действие на магнитното поле върху проводник с ток, сила на Лоренц	79
5.3.6	Сили между два успоредни проводника с ток	80
5.3.7	Движение на заредени частици в еднородно магнитно и електрично поле	81
5.3.8	Ефект на Хол	82
5.3.9	Поток и циркулация на магнитното поле, закон на Фарадей .	83
5.4	Магнитно поле във веществото	85
5.4.1	Диамагнетизъм	86
5.4.2	Парамагнетизъм	87
5.4.3	Феромагнетизъм, феримагнетици и антиферомагнетици . . .	88
6	Светлина	90
6.1	Физична природа на светлината	90
6.1.1	Геометрична оптика	91
6.1.2	Електромагнитна природа на светлината	92
6.2	Интерференция на светлината	93
6.2.1	Опит на Юнг	93
6.2.2	Интерференция от тънкък слой	95
6.3	Дифракция на светлината	96
6.3.1	Принцип на Хюйгенс–Френел	96
6.3.2	Френелови зони, дифракция от кръгъл отвор	97
6.4	Поляризация	100
6.4.1	Закон на Малюс	100
6.4.2	Получаване на поляризирана светлина	101
	Физически константи	104
	Предметен указател	105

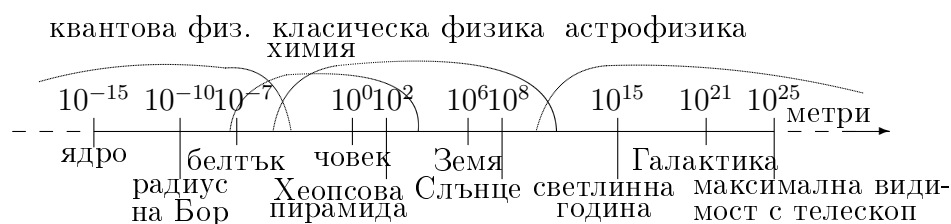
Глава 1

Основи на механиката

1.1 Ролята на физиката като фундаментална наука

1.1.1 Място на физиката в естествознанието

Най-общо естествознанието можем да определим като съвкупността от науките за природата. Тази дефиниция е твърде обща - например човешкото общество е част от природата, но науките които се занимават с изучаването на различни аспекти от него като история, икономика, социология, право не се причисляват към естествознанието, така, че тази дефиниция се нуждае от уточняване. Според нас най-кратко различието може да изяснено по отношението на съответната наука към думата "закон". В единия случай законите, които изучава съответната наука са напълно независими от човек и не могат да се променят по никакъв начин (например закона за земното притегляне), докато в другия случай те могат да се променят (например закона за движение по пътищата).



Фигура 1.1: Размери в природата.

Физиката е наука, изучаваща фундаменталните закони на природата. Тази дефиниция отново е твърде обща. Тя отъждествява физиката с цялото естествознание. Такава е била ситуацията по времето на Аристотел. В последствие настъпва диференциация - развиват се различни естествени науки имащи свои обекти и методи на изследване. Например химията изучава, използвайки методите на анализ и синтез, химическите реакции и превръщането на веществата. Физиката обаче образува теоретичната основа на химията. Химическата връзка и процесите протичащи в химичните реакции са физични процеси, които могат да бъдат обяснени от законите на квантовата и статистическата механика, които са дялове от физиката. Проблемът за редуцията т.е. сводимостта на една наука към друга е сложен философски въпрос, по който още се спори. В някои случаи нещата са ясни - теоретичната химия се свежда към физиката. Ние знаем, че физиката дава принципна възможност да се изчислят величините характеризиращи строе-

жа и реакционната способност на сложните молекули. По-просто и бързо е обаче това да се направи с методите на химията. По такъв начин, физиката създава теоретичните основи на съвременното естествознание. С това не се отменя самостоятелността на различните естествени науки – те получават по-дълбока и единна основа.

Физиката се състои от различни дялове отговарящи на различни аспекти на природата. На фиг.1.1 по оста x в логаритмичен мащаб са нанесени положенията, които заемат някои обекти в зависимост от размерите им. В зависимост от големината на обектите, които изучава, физиката се дели на :

- квантова физика – изучава микрочастиците;
- класическа физика – изучава макроскопичните тела.

В зависимост от скоростта на телата физиката се дели на :

- нерелативистка физика – описва движението на тела с малки скорости;
- релативистка физика – описва движението на тела със скорости близки до скоростта на светлината.

На фиг.1.1 двата края – на най-малкия и на най-големия наблюдаван размер се изучават от различни дялове на физиката, но помежду им има много общо – оказва се, че свойствата на микросвета определят свойствата на едро мащабните обекти във вселената, а изучаването на последните може да ни помогне да разберем свойствата на микрочастиците и тяхните взаимодействия.

Физиката е естествената наука, която понастоящем е получила най-голямо развитие. За това има различни причини:

- фундаменталните физичните закони са прости;
- физичните обекти са постоянни, а явленията лесно възпроизведими, поради което се поддават на детайлно изучаване;
- резултатите от физичните изследвания намират бързо приложение в стопанската дейност на хората, което способства за финансирането им.

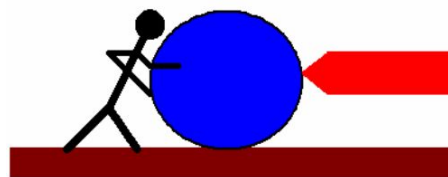
В историята на физиката не веднъж се е случвало някоя теория да достигне до границите на своята приложимост, които се преодоляват с построяването на нова теория. Развитие на физичните теории е преминало през най-много етапи, затова историята на физиката служи като пример за развитието на другите науки и е обект на философията.

1.1.2 Физика и псевдонаука

Големият успех на физиката е породил желанието физичните понятия да се използват за обясняване на всички явления в природата, без обаче да се обръща внимание, че физичната терминология е точно дефинирана и използването ѝ извън дефиниционната ѝ област е некоректно. Например основните понятия във физиката *работа* и *енергия* имат точно количествено определение и се различават по смисъл от житейската представа за работа и вестникарската за енергия.

Особено се спекулира с понятието *поле*. Полето е функция (скаларна, векторна, тензорна и пр.) дефинирана във всяка точка на пространството и времето. Физическото съдържание, което се влага в тази математическа дефиниция е сложно и е свързано с понятието за частица. Връзката между тези две основни понятия се изяснява в квантовата теория на полето. Съвършено неясно е например, какво съдържание се влага в понятието *биополе*. Разпространението му, вероятно е породено от голямата употреба на термина поле във физиката. Ако бяха живели през XVIII век, хората, които говорят за биополе сега, тогава биха говорили за *биофлуид*. Просто по това време е било модерно всяко явление в природата да се обяснява с действието на специален флуид: топлината е проява на топлорода, горенето на флогистона, светлината на етера и др. подобни.

За илюстрация на разликата между научния метод и псевдонаучния ще приведем един откъс от книгата на Ерик Роджърс „Физика за любознателни“. Разговорът се води между Вас – съвременен човек и Фауст по въпроса за природата на триенето. Фауст твърди, че търкалящото се топче спира поради действието на демони върху него:



Фигура 1.2: Сила на триене според Фауст.

Вие: Аз не вярвам в демони.

Фауст: А аз вярвам.

Вие: Аз не мога да си представя как демоните могат да създадат триене.

Фауст: Те просто застават пред предметите (фиг.1.2) и им пречат да се движат.

Вие: Но аз не мога да ги видя даже на грапава повърхност.

Фауст: Те са много малки и прозрачни.

Вие: На грапава повърхност триенето е по-голямо.

Фауст: Там има повече демони.

Вие: Маслото намалява триенето.

Фауст: Да, защото демоните се давят в него.

Вие: Ако полираме повърхността триенето се намалява.

Фауст: Защото демоните намаляват.

Вие: По-тежко топче изпитва по-голямо триене.

Фауст: Защото то натиска повече, чупи костите на демоните и те му оказват по-голямо съпротивление.

Вие: Ако поставя книга на масата и я бутам леко, тя няма да се помръдне докато не натисна по-силно.

Фауст: Демоните ви пречат да движите книгата, но тяхната сила е ограничена.

И т.н. на всеки ваш нов довод Фауст ще припише ново свойство на демоните. За да обясним явлението триене не достатъчно само да му дадем име и да опишем свойствата му. Ние трябва да го свържем с останалите физични понятия, които участват в други явления в природата. Тогава няма да бъде необходимо за всеки факт да измисляме различно обяснение.

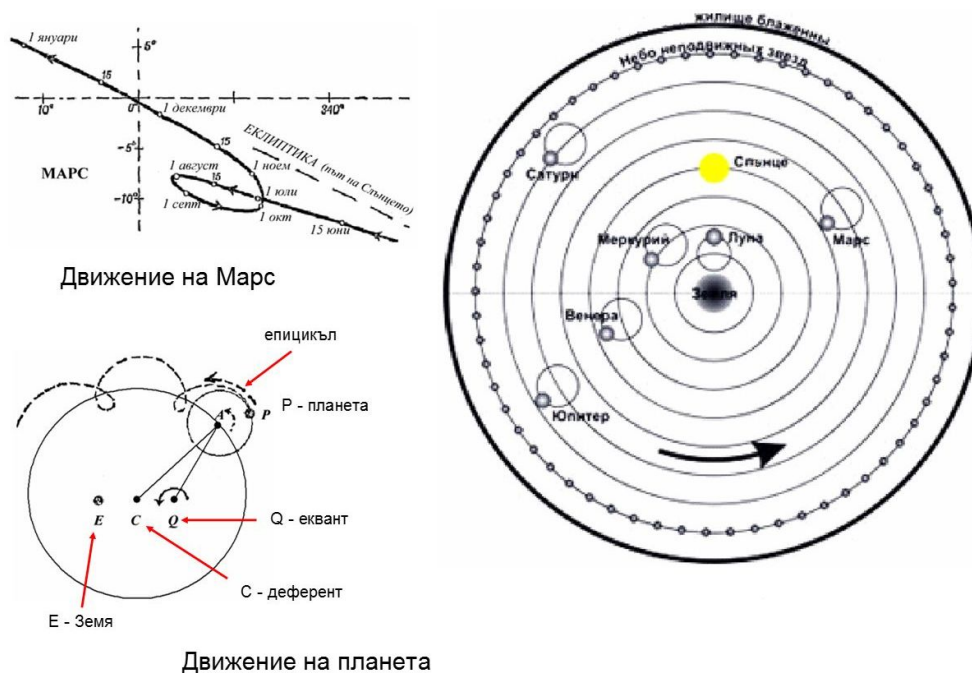
Теорията на триенето, която развива Фауст е пример за *феноменологична* теория (от *phenomenon* – явление). При този тип теории (такава е например класическата *термодинамика*) се разглежда определена съвкупност от явления, които се характеризират с определени параметри, базирани непосредствено на опита. Законите дават връзките между феноменологичните параметри. При *микроскопическите теории* всички явления се обясняват като резултат от движението на микрочастиците изграждащи телата. Така понятието за *температура*, която в термодинамиката се въвежда като феноменологична величина, в молекулно кинетичната теория се извежда от хаотичното движение на молекулите.

век	година	физик	откритие	обединение на	
17	1609	Галилео Галилей	падането на телата		
	1672	Ото фон Герике	електрическа машина		
	1687	Исак Нютон	<i>принципи на механиката</i>	небесна и земна механика	
18	1744	Мушенбрук и Клайст	лайденска стъкленица		
	1800	Александро Волта	ел. батерия		
	1820	Ханс Оерщед	магнитно действие на тока	електричество и магнетизъм	
19	1831	Майкъл Фарадей	електромагнитна индукция		
	1864	Джеймс Кларк Максвел	<i>електродинамика</i>	електродинамика и светлина	
	1887	Хайнрих Херц	електромагнитни вълни		
	1895	Вилхелм Рентген	рентгенови лъчи		
	1896	Анри Бекерел	радиоактивност		
	1900	Макс Планк	формула на Планк-14.XII.		
	20	1905	Алберт Айнщайн	<i>теория на относителността</i>	
	1913 1967	Нилс Бор Вайнберг, Салам, Глешоу	<i>квантова механика</i> <i>квантова теория на полето</i>	електрослабо и силно взаимодействие	
	21	????	???	Велико обединение !	

Таблица 1.1: Революционни открития във физиката.

1.1.3 Модели във физиката

Физиката изучава явленията в природата, но те са толкова обвързани едно с друго, че за да извлечем законите, на които се подчиняват е необходимо да направим опростяване, като се абстрахираме от несъществените елементи, които не влияят на конкретното явление. Това води до създаването на *модели*. Например ако искаме да опишем движението на някое тяло, в определени случаи можем да пренебрегнем неговите размери. Обектът, който получаваме се нарича *материална точка* и за да проследим движението ѝ в нашето тримерно пространство са достатъчни само 3 параметъра, наречени *степенни на свобода*. Ако не можем да пренебрегнем размерите на тялото можем да използваме друго приближение - моделът на *абсолютно твърдото тяло*. В него се приема, че разстоянието между всеки две точки е постоянно. От това следва, че движението му може да се опише с 6 параметъра – 3 координати за положението на центъра на тялото и 3 ъгъла на въртене около 3 взаимно перпендикулярни оси, следователно абсолютно твърдото тяло има 6 степени на свобода. Във физиката има и модели с безкрайно много степени на свобода – такава е например еластичната среда. По-нататък ще се запознаем с други модели: на хармоничния осцилатор, идеалния флуид, идеалния газ, точковия заряд и др. Ще обърнем внимание, че всички тези модели представляват абстракции т.е. в природата такива обекти не съществуват.



Фигура 1.3: Система на Птолемей.

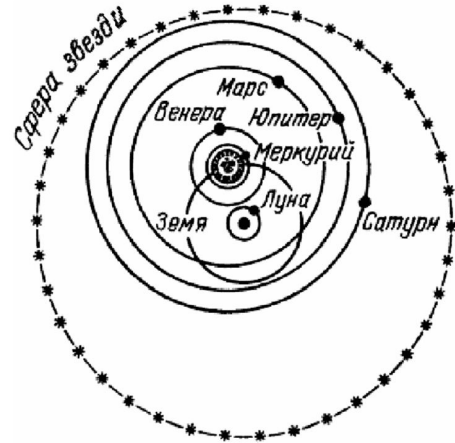
Моделите претърпяват развитие с времето, или биват изоставяни, когато станат известни нови факти. Ще дадем пример с модела, който описва движението на небесните тела.

Още от дълбока древност хората са забелязали, че на небето има два вида обекти – тези, които се движат с постоянна скорост те нарекли звезди, а тези, които се движат неравномерно нарекли планети (на гръцки пътешественици).

Докато движението на звездите е много лесно за описване – във всички древни модели те се са прикрепени към една сфера, която се върти с постоянна скорост около Земята, то описанието на движението на планетите е трудно. През 1 век от н.е. Клавдий Птолемей създава система, която описва добре движението им. Обикновено *системата на Птолемей* се обяснява така – в центъра е Земята, а около нея се въртят Слънцето и планетите. Моделът на Птолемей е много, много по-сложен (фиг. 1.3). Според него една планета се върти равномерно по епицикъл (малък кръг), който от своя страна се движи по окръжност с център деферент (точка C на фиг. 1.3) и се върти равномерно около еквант (точка Q). Земята се намира симетрично на същото разстояние от C като Q , т.е. в действителност в Птолемеевата система планетите не се въртят около Земята! Тази сложна схема е измислена, за да се обясни неравномерното и ретроградно (на фиг. 1.3 се вижда, че в периода 1 юли – 1 октомври Марс се движи в обратна посока) движение на планетите.

С времето, обаче, астрономите започват да наблюдават различия между наблюдаваното положение на планетите и пресметнатото от модела на Птолемей. 14 века по-късно те започват да се опитват да подобрят модела. Николай Коперник намира радикално решение – според него планетите се въртят около Слънцето по окръжности. Датският астроном Тихо де Брахе създава хибриден модел – планетите се въртят около Слънцето, а Слънцето заедно с тях около Земята (фиг. 1.4). И двата модела не удовлетворяват Йохан Кеплер – измерванията на Тихо де Брахе са много точни и се отклоняват и тях.

Използвайки тези измервания Кеплер успява да начертае орбитата на Марс и вижда, че тя не е окръжност, а елипса. В предложената от него система планетите се движат по елипси около Слънцето, което е в един от фокусите им (първи закон на Кеплер). Окончателно проблема за движението на планетите е решен от Нютон, който на базата на трите принципа на динамиката и закона за гравитацията получава трите закона на Кеплер. Така Нютон извършва първото обединение във физиката (таблица 1.1) – на небесната и земната механика. Нютоновата механика достига своя връх през 19 век, когато френският математик и астроном Льоверие предсказва съществуването на неизвестна дотогава планета (Нептун) и изчислява положението ѝ по отклоненията на Уран от орбитата му според небесната механика. Льоверие се е опитал да разреши по същия начин загадката с отклонението на перихелия на Меркурий, като предполага съществуването на малка планета Вулкан близо до Слънцето, която обаче не е открита. Едва 66 години по-късно Алберт Айнщайн обяснява загадката чрез своята *обща теория на относителността*, която обяснява по друг начин гравитацията и позволява по-точно описание на движението на небесните тела.



Фигура 1.4: Система на Тихо де Брахе.

1.2 Кинематика

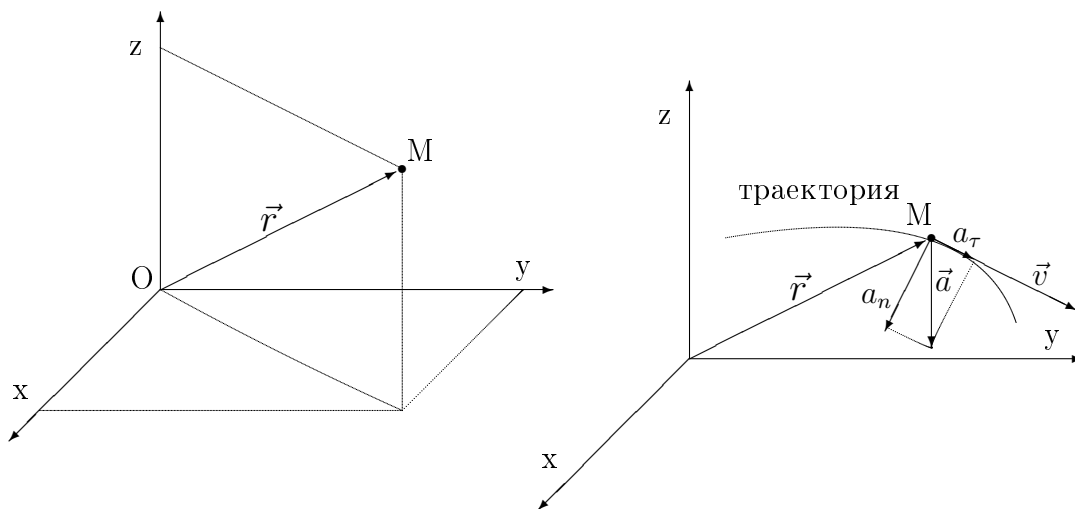
Кинематиката изучава движението на телата без да се интересува от причините, които са го породили. Най-просто се описва движението на *материална точка* – тяло, на което размерите се пренебрегват. Друго удобно приближение е *абсолютно твърдото тяло*. Разстоянието между всеки две негови точки остава постоянно. За да опишем движението е необходимо да разполагаме с отправна система, спрямо която да го отчитаме. Ние ще използваме дясно ориентирана координатна система.

1.2.1 Закон за движение, скорост и ускорение

Положението на точка M в пространството се задава чрез *радиус-вектора* \vec{r} . Проекциите му върху координатната система xOy се наричат координати на точката M (фиг. 1.5) :

$$x = r_x, \quad y = r_y, \quad z = r_z,$$

което означаваме с $\vec{r} = (x, y, z)$.



Фигура 1.5: Дясно ориентирана координатна система.

Зависимостта $\vec{r}(t)$ на радиус-вектора от времето t , наричаме закон за движението, а съвкупността от всички точки, през които минава M през своето движение се нарича *траектория*. Разликата между две положения на радиус вектора в два последователни момента време се нарича нарастване $d\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ и представлява преместването на точката M .

Моментната скорост на точката се дефинира като производната на радиус-вектора $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, а *ускорението* като производна на скоростта е $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right), \quad \vec{a} = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt} \right).$$

Проекциите им върху осите на координатната система са :

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt}, & a_x &= \frac{dv_x}{dt}, & a_x &= \frac{d^2x}{dt^2} \\ v_y &= \frac{dy}{dt}, & a_y &= \frac{dv_y}{dt}, & a_y &= \frac{d^2y}{dt^2} \\ v_z &= \frac{dz}{dt}, & a_z &= \frac{dv_z}{dt}, & a_z &= \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned}$$

Големината на скоростта $v = |\vec{v}|$ и ускорението $a = |\vec{a}|$ могат да бъдат пресметнати от компонентите им :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Обърнете внимание, че компонентите на всеки вектор зависят от избора на координатната система, но големината му не зависи! В сила са уравненията :

$$s(t) = s_0 + \int |\vec{v}(t)| dt; \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int \vec{v}(t) dt; \quad \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int \vec{a}(t) dt,$$

където $s(t)$ е изминатия път. Когато ускорението е постоянно : $v(t) = v_0 + at$ и $s(t) = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$.

1.2.2 Нормално и тангенциално ускорение

Скоростта е допирателна във всеки един момент към траекторията. Ускорението може да се разложи на две компоненти (фиг.1.5) : a_τ – по допирателната и a_n по нормалата (перпендикулярно на допирателната), за които е в сила :

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{R}$$

R се нарича *радиус на кривина*.

Нека едно тяло се движи с постоянна скорост по окръжност с радиус R . Да означим ъгъла, който сключва тялото с оста x с φ . Като проектираме радиус вектора \vec{r} по осите x и y получаваме :

$$x = R\cos(\varphi), \quad y = R\sin(\varphi)$$

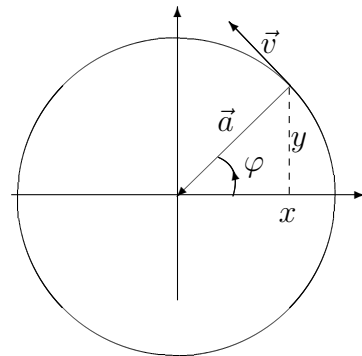
Ъгълът φ се мени с постоянна скорост, следователно можем да напишем :

$$\varphi = \omega t$$

Величината ω се нарича *ъглова скорост*.

Като диференцираме по времето получаваме за скоростта и ускорението :

$$v_x = -R\omega\sin(\omega t), \quad v_y = R\omega\cos(\omega t)$$



Фигура 1.6: Движение с постоянна скорост по окръжност.

$$a_x = -R\omega^2 \cos(\omega t), \quad a_y = -R\omega^2 \sin(\omega t)$$

За големината на скоростта и ускорението получаваме :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(R\omega)^2 \sin^2(\omega t) + (R\omega)^2 \cos^2(\omega t)} = R\omega \sqrt{\cos^2(\omega) + \sin^2(\omega)}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(R\omega^2)^2 \cos^2(\omega t) + (R\omega^2)^2 \sin^2(\omega t)} = R\omega^2 \sqrt{\sin^2(\omega) + \cos^2(\omega)}$$

$$v = \omega R, \quad a = R\omega^2$$

Вижда се, че движението на тяло по окръжност с постоянна скорост се извършва с постоянно по големина ускорение $\frac{v^2}{R}$, насочено към центъра, което е просто нормалното ускорение a_n , а тангенциалното ускорение е нула.

1.3 Динамика на материална точка

Динамиката изучава движението на телата. В основата на класическата динамика стоят три закона (принципи) формулирани от Нютон през 1697 г. Нютоновата механика е приложима само за определен клас явления – за тела движещи се с малки скорости (спрямо скоростта на светлината) и имащи макроскопични размери.

1.3.1 Принципи на динамиката

I закон на Нютон: Всяко тяло остава в състояние на покой или се движи праволинейно с постоянна скорост, ако не му действа сила, изменяща скоростта му.

II закон на Нютон: Ако на тяло действа сила, то изменението на количеството на движението $m\vec{v}$ е пропорционално на големината на приложената към него сила. Изменението става в посоката на силата.

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

III закон на Нютон: На всяко действие съответствува равно по големина и противоположно по посока противодействие.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Първият закон ни дава възможност да изберем подходяща отправна система, в която да изучаваме движението. *Инерциалната* отправна система е такава система, в която е изпълнен I принцип на Нютон. Вторият закон се нарича още уравнение на динамиката. Скоростта и ускорението, които фигурират във него се дефинират в инерциална отправна система. Той е верен само в такива системи. В неинерциалните системи към силите, които действат върху телата се добавят *инерчните* сили. II закон на Нютон дефинира понятията маса m и сила F . Ако изберем масата на едно тяло за еталон, то с негова помощ, по неговото ускорение можем да определим силите, които му действат, а като знаем силите можем да определим и масите на останалите тела. По този начин се конструира и системата единици, в които се измерват физичните величини. У нас е избрана за еталонна *международната система единици SI(CI)*, в която за еталонни са избрани:

- единица за дължина – метър;
- единица за време – секунда;
- единица за маса – килограм.

Единицата за сила се получава като заместим във II закон с единиците за маса и ускорение:

$$[F] = [m][a]$$

Тя се нарича нютон и $1N = kg \cdot m/s^2$.

1.3.2 Сили

Силата е векторна величина. Резултантната сила \vec{F} , която действа върху едно тяло се получава като векторна сума от всички сили \vec{F}_i , които действат върху тялото.

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

На всяко тяло на Земята действа сила на тежестта \vec{G} равна на масата на тялото умножена по земното ускорение $g = 9.8$ (фиг.1.7).

$$G = mg$$

Последната формула дава удобен метод за измерване на масата посредством измерване на теглото на тялото. Масата определена по този начин се нарича *гравитационна*, а тази определена чрез II закон на Нютон – *инерционна*. Равенството между инерционната и гравитационната маса е проверено с много голяма точност. Този факт е в основата на *общата теория на относителността*.

На тяло поставено върху опора, действа сила \vec{N} , която се нарича реакция на опората. Тя действа винаги перпендикулярно на опората – (фиг.1.7). На тяло движещо се по повърхност, действа сила на триене $\vec{F}_{тр.}$, насочена обратно на движението. Тя е пропорционална на реакцията на опората $F_{тр.} = kN$, като коефициента k се нарича коефициент на триене.

Силата, която кара тялото да се движи по окръжност с постоянна скорост може да се получи от I принцип на Нютон $F = ma$, като заместим ускорението a с центростремителното ускорение $\frac{v^2}{R}$:

$$F = \frac{mv^2}{R},$$

тя се нарича центростремителна сила понеже е насочена към центъра на окръжността, по която се движи тялото.

Силата, с която една пружина действа при разтегля или свиване с x се нарича еластична сила и се дава с формулата:

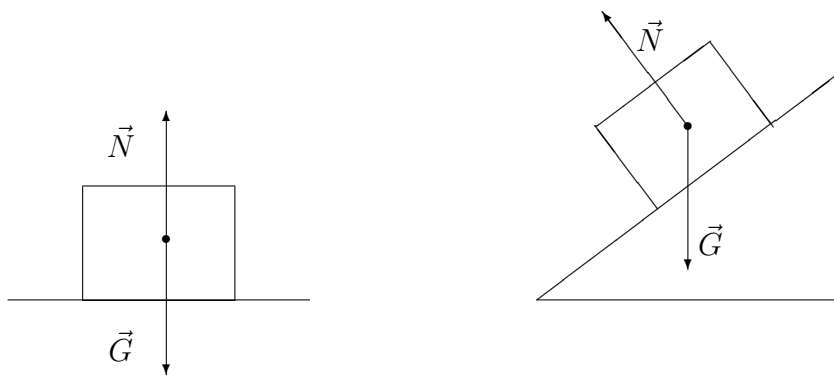
$$\vec{F} = -k\vec{x}$$

Знакът – е поради действието на силата в посока обратна на разтеглянето.

Всички тела си взаимодействуват помежду си със сила зависеща от масите им наречена гравитационна сила. Формулата:

$$F = \frac{\gamma m_1 m_2}{r^2}$$

е била получена от Нютон въз основа на законите на движение на планетите около Слънцето формулирани от Кеплер. В нея m_1 и m_2 са масите на взаимодействащите си тела, r е разстоянието между тях, а γ е гравитационната константа.



Фигура 1.7: Сила на тежестта и реакция на опората.

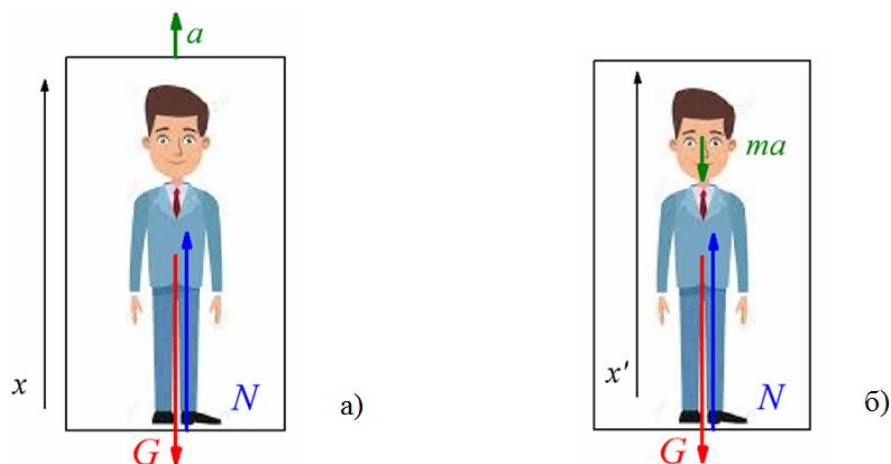
Всички сили, които наблюдаваме в природата са резултат от четири *фундаментални взаимодействия*. Най-силно е ядреното взаимодействие (*силно взаимодействие*) – то държи заедно протоните и неутроните в ядрото, но извън него бързо отслабва. Следващото по сила е *електромагнитното взаимодействие*, което действа между заредените часници. Следва *слабото взаимодействие* – то се проявява при разпадането на неутрона, и най-слабо е *гравитационното взаимодействие*.

1.3.3 Неинерциални отправни системи

Вторият закон на Нютон е в сила за инерциални отправни системи, но ние живеем върху неинерциална отправна система – Земята се върти около оста си и това най-ярко се илюстрира с опита на Фуко. Ако наблюдаваме люлеенето на махало ще забележим, че то променя равнината на движението си. Ако поставим махало на Северния полюс ще видим, че за 1 час равнината на люлеенето му се завърта с $180/24 = 15^\circ$. От наша гледна точка ние, стъпили на неподвижната Земя, сме в покой, а махалото се върти под действието на някаква сила. Всъщност тази сила ни е добре позната. Представете си, че сте седнали в автомобил, който рязко потегля – ще усетим че сме притиснати към седалката на колата, т.е. силата действа в обратна посока на движението. Ще поясним произхода на тази сила с примера показан на фиг. 1.8.

Да разгледаме асансьор движещ се с ускорение a нагоре, в който се намира човек. На фиг. 1.8 а) е избрана инерциална отправна система, оста x е насочена нагоре. На човека действат две сили – на тежестта G и реакцията на опората N . Уравнението на движение е:

$$ma = N - G \tag{1.1}$$



Фигура 1.8: Човек в асансьор: а) инерциална отправна система, б) неинерциална отправна система.

В отправна система движеща се заедно с човека ускорението е нула (фиг. 1.8 б), оста е означена с x'). Освен силата на тежестта и реакцията на опората му действа допълнителна сила. Уравнение (1.1) може да бъде записано във вида:

$$m \cdot 0 = N - G - ma$$

От тук се вижда, че силата, която се появява в неинерциална отправна система е силата на инерцията $-m\vec{a}$. Когато разглеждаме движението на тяло в неинерциална отправна система към действащите върху него сили трябва да добавим и силата на инерцията.

Ако тяло се върти по окръжност с постоянна скорост на него му действа центростремителна сила. От гледна точка на тялото то е в покой, защото освен центростремителната сила му действа силата на инерцията, която в случая се нарича *центробежна сила*. На всяко тяло намиращо се на въртящата се Земя действа центробежна сила, но ако тялото се движи възниква още една сила, зависеща от скоростта – *Кориолисова сила*.

1.3.4 Закон за запазване на импулса

Импулс (количество на движението) на материална точка по дефиниция е: $\vec{p} = m\vec{v}$.

Импулсът на система от материални точки \vec{P} е сумата от импулсите на точките:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$$

Скоростта, с която се променя импулса на системата можем да изчислим като използваме втория закон на Нютон.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i^{\text{вън.}} + \vec{F}_i^{\text{вътр.}}) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{вън.}} + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{вътр.}}$$

В горното уравнение сме разделили силите на вътрешни ($\vec{F}_i^{\text{вътр.}}$) и външни ($\vec{F}_i^{\text{вън.}}$).

$$\vec{F}_i^{\text{вътр.}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \vec{F}_{ij},$$

където \vec{F}_{ij} е силата между точките i и j . Индексите i и j са сумационни, тях можем да означим с коя да е буква, затова можем да ги разменим – ще получим същия резултат:

$$\vec{F}_i^{\text{вътр.}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \vec{F}_{ji},$$

и следователно като съберем двете уравнения:

$$2\vec{F}_i^{\text{вътр.}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji})$$

Според III-тия закон на Нютон $\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0$ следователно:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{вън.}}$$

т.е. промяната на импулса на системата зависи само от вътрешните сили и изобщо не зависи от външните.

Една система се нарича *затворена*, когато върху нея не действуват външни сили. За нея от горното уравнение следва, че:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0, \quad \vec{P} = \text{const}$$

Закон за запазване на импулса: импулсът на всяка затворена система се запазва.

В частния случай, когато системата не е затворена, можем да изберем ос x , върху която сумата от проекциите на външните сили е нула. Върху тази ос импулсът се запазва понеже:

$$\frac{dP_x}{dt} = \sum_{i=1}^n F_{ix}^{\text{вън.}} = 0$$

На Земята винаги действа силата на тежестта, насочена перпендикулярно на повърхността ѝ, затова подходяща е ос хоризонтална на земната повърхност. Ако хвърлим едно тяло и пренебрегнем силата на триене в атмосферата, то хоризонталната му проекция на скоростта ще се запазва.

1.4 Работа и енергия

Понятието *енергия* се дефинира в механиката, но намира приложение във всички области не само на физиката, но и във всички естествени науки. То се използва много широко в живота, като често употребата му няма нищо общо с физичната

величина, т.е. в много ненаучни твърдения можете да замените думата „енергия“ с коя да е друга дума, без смисълът да се измени. Често се спекулира много с термина „отрицателна“ енергия. Както ще видим по-нататък кинетичната енергия е винаги положителна (или нула, ако тялото не се движи), а потенциалната енергия може да бъде отрицателна. Потенциалната енергия обаче е дефинирана с точност до константа, така, че с добавянето на подходящо число, всяка отрицателна енергия може да се направи положителна. В крайна сметка значение има изменението на енергията, което може да има всякакъв знак.

1.4.1 Работа на сила, Мощност

Работата dA , извършвана от силата \vec{F} при преместването на тяло на разстояние $d\vec{r}$ се дефинира като скаларното произведение (фиг. 1.4.1):

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cos \alpha dr$$

Изразена чрез проекциите върху координатна система формулата се представя като:

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Обърнете внимание, че компонентите на векторите зависят от избора на координатната система, но тяхното скаларно произведение не зависи, т.е. работата е *инвариант*. Такива величини имат много голямо значение във физиката.

Пълната работа за придвижване от точка 1 до 2 е:

$$A = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 F \cos \alpha dr$$

Моментната мощността P на силата F е

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

От формулата се вижда, че за постоянна мощност при малка сила се получава голяма скорост, а за голяма сила – малка скорост. На това се базира необходимостта от превключването на скоростите в автомобилите.

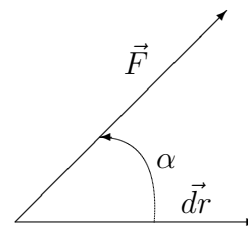
Мерната за мощност единица в система СИ е ват – W.

1.4.2 Работа на силите на тежестта

Ще пресметнем работата, която извършва силата на тежестта при издигане на тяло с маса m от височина h_1 до h_2 . Ще разложим векторите на преместването $d\vec{r}$ и силата на тежестта \vec{G} върху осите на координатната система показана на фиг. 1.10. Оста z сме насочили вертикално нагоре, x е хоризонтална, а y е насочена към нас.

Силата на тежестта е $\vec{G} = m\vec{g}$. От фиг. 1.10 се вижда, че:

$$d\vec{r} = (dx, dy, dz), \quad \vec{G} = (0, 0, -mg)$$



Фигура 1.9: Елементарна работа.

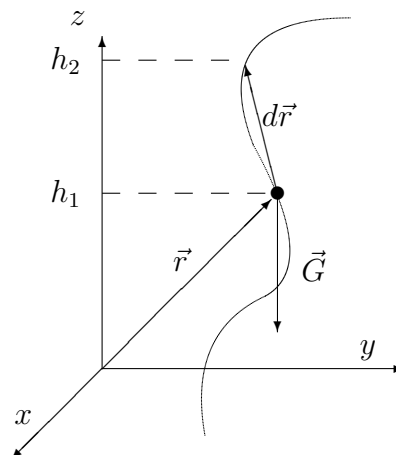
$$d\vec{r} \cdot \vec{G} = -mgdz$$

Следователно за работата се получава:

$$A = \int_1^2 \vec{G} \cdot d\vec{r} = - \int_{h_1}^{h_2} mgdz = -mg \int_{h_1}^{h_2} dz$$

$$A = mg(h_1 - h_2)$$

От формулата се вижда, че работата на силите на тежестта зависи само от началната и крайната височина. Има и други сили, например еластичната, които имат подобно свойство.



Фигура 1.10: Работа на силите на тежестта.

1.4.3 Кинетична енергия

Да означим сумата от всички действащи върху тялото сили с \vec{F} (*резултантната сила*). Като използваме II закон на Нютон $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$ и формулата за скоростта на тялото $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, за работата на всички сили получаваме:

$$A = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 m d\vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \int_1^2 m \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$A = m \int_{v_1}^{v_2} d \left(\frac{v^2}{2} \right) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$$

Величината $\frac{mv^2}{2}$ се нарича *кинетична енергия* E_k . Система състояща се от n тела има кинетична енергия:

$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}$$

За системата е в сила: $A = \Delta E_k$ - работата на всички сили действащи върху системата е равна на изменението на кинетичната ѝ енергия.

1.4.4 Потенциална енергия

Видяхме, че работата на силата на тежестта зависи само от началната и крайната височина, такива сили, работата на които зависят само от началното и крайното положение на тялото се наричат *потенциални*. Ако тялото се движи по *затворен контур*, началното и крайното му положение съвпадат, следователно работата извършвана от потенциалните сили при движението на тялото по затворен контур е нула.

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Сили, които изпълняват горното условие се наричат *консервативни*, следователно потенциалните сили са консервативни. Обратното твърдение не е вярно – например работата на реакцията на опората е винаги нула, затова за нея горното условие е изпълнено, но тя не е потенциална. Работата на потенциалните сили не зависи от траекторията, а само от началното и крайното положение. Затова тя може да бъде представена като изменение на една величина, наречена *потенциална енергия* E_p :

$$A = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$$

Тъй като в дефиницията за E_p тя фигурира само чрез нарастването си, то потенциалната енергия е дефинирана с точност до адитивна константа, която се избира от съображения за удобство. Потенциалната енергия на тяло на височина h над земната повърхност е: $E_p = mgh$.

За да разтегнем или свием една пружинка с x трябва да приложим сила пропорционална на x . От своя страна тя ще действа с еластичната сила $F = -kx$, затова работата е:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} -kx dx = -k \int_{x_1}^{x_2} x dx = -\left(\frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}\right)$$

Вижда се, че работата зависи само от началното и крайното положение, затова можем да въведем потенциална енергия:

$$E_p = \frac{kx^2}{2}$$

В този случай адитивната константа на потенциалната енергия сме избрали така, че енергията да е нула, ако пружинката не е разтеглена.

Нека потенциалната енергия $E_p(x, y, z)$ е различна за различните точки на пространството. Съгласно дефиницията за потенциална енергия:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dE_p,$$

следователно можем да запишем:

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

Операцията, с която от скаларна функция се получава векторна чрез диференциране по пространствените координати се нарича *градиент*. Записва се като:

$$\vec{F} = -\text{grad}(E_p)$$

Освен означението *grad* се използва и така наречения *набла вектор* $\vec{\nabla}$. Той се дефинира като:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

така, че $\vec{F} = -\vec{\nabla}E_p$.

Очевидно, че набла векторът не е обикновен вектор – той е *оператор*, тъй като с него извършваме операцията диференциране, с която получаваме компонентите на обикновен вектор. Също като векторите с него можем да умножаваме скалярно и векторно (виж уравненията на Максвел на стр. 65).

1.4.5 Закон за запазване на енергията

Да разделим силите, действащи в една система от тела на външни и вътрешни и да предположим, че вътрешните сили са два вида – потенциални и сили на триене. Да означим съответните им работи с $A_{\text{вън}}$, $A_{\text{пот}}$ и $A_{\text{тр}}$. За работата A на всички сили можем да запишем:

$$A = A_{\text{вън}} + A_{\text{пот}} + A_{\text{тр}}$$

Заместваме A с ΔE_k а $A_{\text{пот}}$ с $-\Delta E_p$ и получаваме:

$$\Delta E_k = A_{\text{вън}} - \Delta E_p + A_{\text{тр}}$$

$$A_{\text{вън}} + A_{\text{тр}} = \Delta E_k + \Delta E_p$$

Ако системата е затворена и в нея липсват сили на триене:

$$\Delta E_k + \Delta E_p = 0$$

и следователно $E_k + E_p = \text{const}$. Сумата $E = E_k + E_p$ се нарича пълна енергия на системата. **Законът за запазване на енергията** гласи, че пълната енергия на всяка затворена система, в която няма сили на триене се запазва. Ако в затворената система има триене се получава:

$$A_{\text{тр}} = \Delta E$$

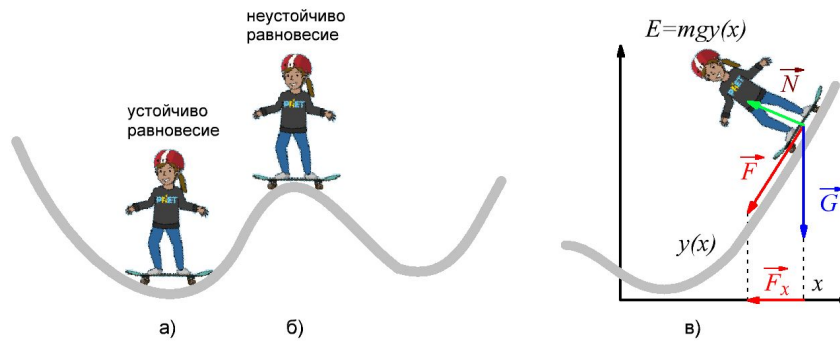
Тъй като силите на триене действуват обратно на движението, то тяхната работа $A_{\text{тр}}$ е отрицателна, следователно енергията на една затворена система или се запазва, или намалява в резултат на действието на сили на триене.

1.4.6 Равновесие

Нека тяло се хлъзга без триене по гладка повърхност с форма $y(x)$ (фиг. 1.11). Потенциалната му енергия е $E_p = mgy$. Тялото се движи под действието на резултантната сила F , сума от силата на тежестта G и реакцията на опората N . Проекцията на F по оста x е:

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx} = -mg\frac{dy}{dx} \quad (1.2)$$

В точка x на фигура 1.11 функцията $y(x)$ е растяща, производната е положителна, а проекцията F_x е отрицателна и следователно движението е към минимума на $y(x)$. Когато го подмине, производната става отрицателна, а проекцията на силата F_x съгласно (1.2) – положителна, следователно тя ще се стреми да върне тялото в минимума.



Фигура 1.11: а) Устойчиво, б) неустойчиво равновесие, в) действащи сили.

В точките, където производната на $y(x)$ е нула, функцията има екстремум и проекцията съгласно (1.2) F_x е нула. Ако се постави в такава точка, тялото ще бъде в равновесие. Ако тялото се постави в минимума (фиг. 1.11 а), то отклоненията му във всяка посока ще породят сила, която се стреми да го върне в минимума, затова такова равновесие се нарича *устойчиво*. Ако тялото се намира в максимум (фиг. 1.11 б) всяко отклонение ще отдалечи тялото от началното му положение – това е *неустойчиво равновесие*.

Да разложим функцията $y(x)$ в областта на минимума a в ред на Тейлър (първата производна в тази точка е нула!):

$$y(x) = y(a) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=a} (x - a)^2 + \dots$$

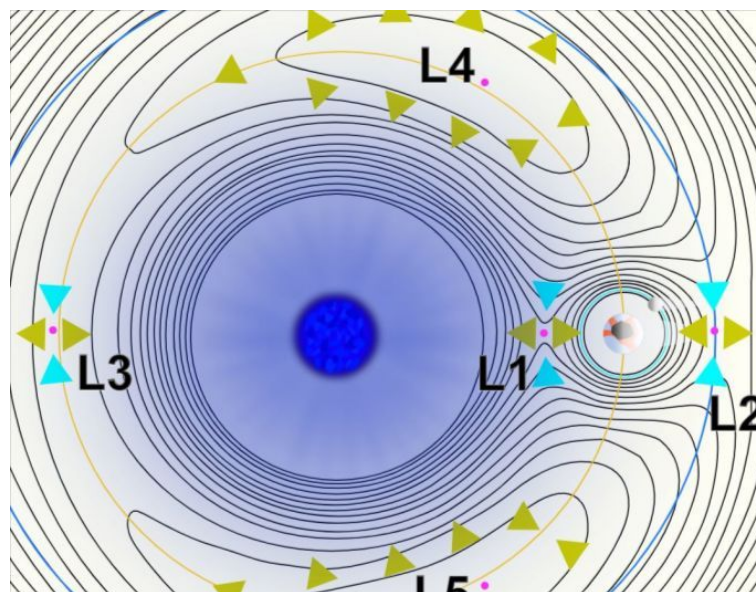
Ако отклоненията от минимума $x - a$ са малки, можем да пренебрегнем членовете от по-висок порядък и следователно потенциалната енергия на тялото става:

$$E_p = E_0 + k \frac{(x - a)^2}{2}$$

Това е потенциалната енергия на еластичната сила, следователно при малки отклонения от устойчивото равновесие тялото ще трепти около него под действието на еластична сила. Такива трептения се наричат хармонични. Тъй като системите, които използваме се намират в устойчиво равновесие (ако бяха в неустойчиво бързо биха се разрушили), то отклоненията им от него водят до хармонични трептения. Това е причината във физиката да има специален раздел за тях.

Във въртящата се система Слънце – Земя потенциалната енергия на произволно тяло е сума от гравитационната и центробежната енергия. В нея съществуват пет точки на равновесие, наречени *точки на Лагранж*, означени с $L1$, $L2$, $L3$, $L4$ и $L5$ на фигура 1.12. В точка $L2$, която е точка на устойчиво равновесие е разположен космическият телескоп „Джеймс Уеб“ (James Webb Space Telescope), успешно изведен в орбита на 25.XII.2021 г. Това е причината той да се намира винаги в сянката на Земята, което му позволява да „вижда“ на разстояние 13 милиарда светлинни години, като използва инфрачервени лъчи.

На фигура 1.12 екипотенциалните повърхнини са нарисувани с черни линии.



Фигура 1.12: Точки на Лагранж в системата Слънце – Земя.

1.4.7 Закони за запазване и симетрия

Изборът на координатна система зависи само от нас, а с това и проекциите на векторите върху осите на координатната система. Понякога е удобно да я изберем така, че някоя ос да е успоредна на дадена сила – например ако насочим оста z перпендикулярно на земната повърхност проекциите на силата на тежестта върху другите две оси ще бъдат нули. Обърнахме внимание (стр. 14), че от векторите можем да образуваме величини, които не зависят от избора на координатната система – например дължината на вектора или скаларното произведение между два вектора. Очевидно те са инвариантни спрямо въртенето на координатната система.

Симетрия	Преобразувания	Инвариантност	Закони за запазване	
			Величина	Значение
	Транслация във времето ($t \rightarrow t + \Delta t$)	Консервативност, еднородност на времето	Енергия	Общата енергия на една изолирана система е константа.
	Транслация в пространството ($x \rightarrow x + \Delta x$)	Хомогенност, еднородност на пространството	Импулс	Общият импулс на една изолирана система е константа.
	Ротация в пространството ($\varphi \rightarrow \varphi + \Delta\varphi$)	Изотропност на пространството	Момент на импулса	Общият момент на импулса на една изолирана система е константа.

Таблица 1.2: Инвариантни преобразувания и съответните им закони за запазване.

Ако някаква величина или уравнение не се променя при никакви трансформации те се наричат инвариантни спрямо тях. Тъй като запазват вида си говорим за симетрия.

През 1918г. Еми Нютер доказва една от най-полезните теореми за физиката т.н. *теорема на Нютер*. От нея следва, че на всяка непрекъсната симетрия на физична система отговаря закон за запазване.

1.4.8 Други формулировки на механиката

Механиката, която изложихме дотук се базира на трите закона на Нютон, затова се нарича **Нютонова механика**. В съвременната физика по-често се използват други подходи, които силно се различават от нея. Те имат предимството, че автоматично отчитат връзките, които могат да съществуват между някои променливи и са много удобни за прехода от класическа към квантова механика.

$$\mathcal{L}_{\text{SM}} = \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{mass}} + \mathcal{L}_{\text{gauge}} + \mathcal{L}_{\text{gauge}/\psi} . \quad (1)$$

Here,

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = i\bar{e}_L^i \not{\partial} e_L^i + i\bar{\nu}_L^i \not{\partial} \nu_L^i + i\bar{e}_R^i \not{\partial} e_R^i + i\bar{\nu}_R^i \not{\partial} \nu_R^i + i\bar{d}_L^i \not{\partial} u_L^i + i\bar{u}_R^i \not{\partial} u_R^i + i\bar{d}_R^i \not{\partial} d_R^i ; \quad (2)$$

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = -v \left(\lambda_e^i \bar{e}_L^i e_R^i + \lambda_\nu^i \bar{\nu}_L^i \nu_R^i + \lambda_d^i \bar{d}_L^i u_R^i + \text{h.c.} \right) - M_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} - \frac{M_W^2}{2 \cos^2 \theta_W} Z_\mu Z^\mu ; \quad (3)$$

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4} (G_{\mu\nu}^a)^2 - \frac{1}{2} W_{\mu\nu}^+ W^{-\mu\nu} - \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{WZA} , \quad (4)$$

where

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g_3 f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \\ W_{\mu\nu}^\pm &= \partial_\mu W_\nu^\pm - \partial_\nu W_\mu^\pm \\ Z_{\mu\nu} &= \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu , \end{aligned} \quad (5)$$

and

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{WZA} &= ig_2 \cos \theta_W \left[(W_\mu^- W_\nu^+ - W_\nu^- W_\mu^+) \partial^\mu Z^\nu + W_{\mu\nu}^+ W^{-\mu} Z^\nu - W_{\mu\nu}^- W^{+\mu} Z^\nu \right] \\ &+ ie \left[(W_\mu^- W_\nu^+ - W_\nu^- W_\mu^+) \partial^\mu A^\nu + W_{\mu\nu}^+ W^{-\mu} A^\nu - W_{\mu\nu}^- W^{+\mu} A^\nu \right] \\ &+ g_2^2 \cos^2 \theta_W (W_\mu^+ W_\nu^- Z^\mu Z^\nu - W_\mu^+ W^{-\mu} Z_\nu Z^\nu) \\ &+ g_2^2 (W_\mu^+ W_\nu^- A^\mu A^\nu - W_\mu^+ W^{-\mu} A_\nu A^\nu) \\ &+ g_2 e \cos \theta_W [W_\mu^+ W_\nu^- (Z^\mu A^\nu + Z^\nu A^\mu) - 2W_\mu^+ W^{-\mu} Z_\nu A^\nu] \\ &+ \frac{1}{2} g_2^2 (W_\mu^+ W_\nu^-) (W^{+\mu} W^{-\nu} - W^{+\nu} W^{-\mu}) ; \end{aligned} \quad (6)$$

and

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}/\psi} = -g_3 A_\mu^a J_{(3)}^{\mu a} - g_2 (W_\mu^+ J_{W^+}^\mu + W_\mu^- J_{W^-}^\mu + Z_\mu J_Z^\mu) - e A_\mu J_A^\mu , \quad (7)$$

where

$$\begin{aligned} J_{(3)}^{\mu a} &= \bar{u}^i \gamma^\mu T_{(3)}^a u^i + \bar{d}^i \gamma^\mu T_{(3)}^a d^i \\ J_{W^+}^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_L^i \gamma^\mu e_L^i + \bar{u}_L^i \gamma^\mu d_L^i) \\ J_{W^-}^\mu &= (J_{W^+}^\mu)^* \\ J_Z^\mu &= \frac{1}{\cos \theta_W} \left[\frac{1}{2} \bar{\nu}_L^i \gamma^\mu \nu_L^i + \left(-\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W \right) \bar{e}_L^i \gamma^\mu e_L^i + (\sin^2 \theta_W) \bar{e}_R^i \gamma^\mu e_R^i \right. \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \right) \bar{u}_L^i \gamma^\mu u_L^i + \left(-\frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \right) \bar{u}_R^i \gamma^\mu u_R^i \\ &\quad \left. + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin^2 \theta_W \right) \bar{d}_L^i \gamma^\mu d_L^i + \left(\frac{1}{3} \sin^2 \theta_W \right) \bar{d}_R^i \gamma^\mu d_R^i \right] \\ J_A^\mu &= (-1) \bar{e}^i \gamma^\mu e^i + \left(\frac{2}{3} \right) \bar{u}^i \gamma^\mu u^i + \left(-\frac{1}{3} \right) \bar{d}^i \gamma^\mu d^i . \end{aligned} \quad (8)$$

Фигура 1.13: Лагранжиан на стандартния модел.

В **Лагранжевата механика** основна роля играе функцията на Лагранж т.н. *лагранжиан*. За една система тя е функция от координатите q_i и скоростите \dot{q}_i на телата и се дефинира като разликата от кинетичната и потенциалната енергия:

$$\mathcal{L}(q_1, q_2 \dots q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2 \dots \dot{q}_n) = E_k - E_p$$

Движението се описва с уравненията на Лагранж:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

Друга много популярна формулировка е **Хамилтоновата механика**. В нея основна роля играе функцията на Хамилтън т.н. *хамилтониан*. За една система тя е функция от координатите q_i и импулсите p_i на телата и се дефинира като:

$$H(q_1, q_2 \dots q_n, p_1, p_2 \dots p_n) = E_k + E_p$$

Движението се описва с уравненията на Хамилтън:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

Функциите на Лагранж и Хамилтън са инвариантни при преобразуванията посочени в таблица 1.2. Всъщност теоремата на Нютон, както и законите за запазване се получават лесно в рамките на тези формулировки. По-долу, на фиг.1.13, сме показали лагранжианът, който описва електрослабото и силното взаимодействие в така наречения стандартен модел на взаимодействията между частиците.

1.5 Специална теория на относителността

Движението на телата винаги се описва спрямо някаква отправна система. Очевидно, че координатите на една точка в различни координатни системи са различни. Опитът, базиращ се на ограничените скорости достъпни на Земята показва, че времето е едно и също – то тече по еднакъв начин и неподвижните и в движещите се координатни системи, в този смисъл то е абсолютно. Освен *абсолютното време* Нютон е въвел и *абсолютно пространство* – всички инерциални системи се движат равномерно и праволинейно спрямо него. На смисъла и значението на това понятие ще се спрем по нататък.

1.5.1 Механичен принцип на относителността

В книгата „Диалози“ Галилей е предложил следните експерименти:

"Оттеглете се някой от приятелите си, в помещение под палубата на кораб, запасете се с мухи, пеперуди и други малки летящи насекоми; може да вземете и съд с вода с малки рибки, плуващи в него. Сложете да виси кофа, от която водата да пада капка по капка в друг съд с тясно гърло, поставен отдолу. Докато корабът е неподвижен, наблюдавайте прилежно като малките летящи насекоми с една и същата скорост се движат във всички посоки на стаята; рибите, както ще видите, ще плуват безразлично във всички посоки; всички падащи капки ще попаднат в поставения съд, и вие, хвърляйки който и да е предмет, няма да се налага да хвърляте го с по-голяма сила в едната посока, отколкото в другата, и ако скачате с два крака, тогава ще направите скок на еднакви разстояния във

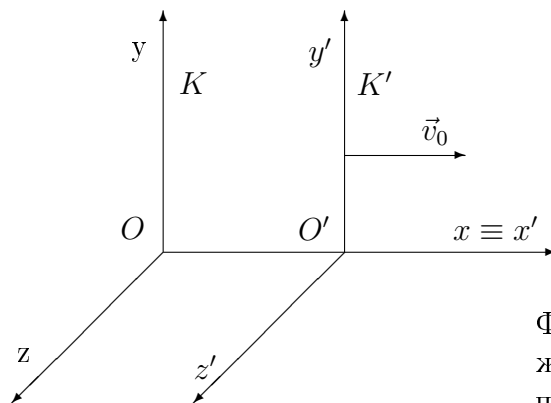
всяка посока. Наблюдавайте всичко това прилежно и у вас няма да възникне съмнение, че докато корабът е неподвижен, всичко ще се случи по този начин. Сега накарайте кораба да се движи с каквато и да е скорост и след това (ако само движението е равномерно и без да се клати на една или друга страна) във всички посочени явления, няма да намерите и най-малката промяна и по никое от тях няма да може да определите дали корабът се движи или стои неподвижен.”

По този живописен начин Галилей е описал това, което днес наричаме *принцип за относителността на Галилей*: всички механични явления протичат еднакво в различните инерциални системи. Ще придадем математическа форма на този принцип.

Разглеждаме движението на една материална точка спрямо две отправни системи: K е неподвижна с оси xyz , а K' е подвижна с оси $x'y'z'$. Осите на двете системи са успоредни и началото O' на K' лежи на оста x , както е показано на фиг. 1.14. Системата K' се движи спрямо K с постоянна скорост \vec{v}_0 , успоредно на оста x .

Нека в началния момент $t = 0$ началата на двете системи O и O' да съвпадат, тогава координатите (x', y', z') на точка в движещата се система K' са свързани с координатите (x, y, z) на същата точка в неподвижната система K с *трансформациите на Галилей*:

$$\begin{aligned}y' &= y, \\z' &= z, \\x' &= x - v_0 t\end{aligned}$$



Фигура 1.14: Връзки между движещата се K' и неподвижната отправна система K .

Като диференцираме по времето и използваме, че то е абсолютно т.е. $t' = t$, получаваме за скоростта на точката в двете системи:

$$v'_y = v_y, \quad v'_z = v_z, \quad v'_x = v_x - v_0$$

или във векторен вид $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0$.

Като диференцираме още веднъж скоростта, получаваме, че ускоренията са еднакви за двете системи:

$$\vec{a}' = \vec{a}$$

Съгласно II закон на Нютон силата е масата по ускорението, следователно силите действащи в системите K и K' съвпадат и движещата се система е също инерциална. Ускоренията и силите са същите, следователно и уравненията не са се променили при прехода от една инерциална система към друга. Свойството на определени уравнения да не се променят при преобразуване на променливите по някакъв закон се нарича *инвариантност*. Можем да кажем, че *уравнението на динамиката е инвариантно относно Галилеевите трансформации*. Практическото проявление е в това, че с никакви механични опити не можем да разберем дали една инерциална система се движи.

1.5.2 Принцип на относителността

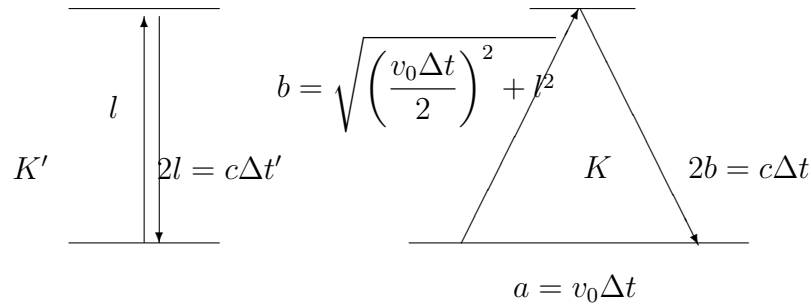
Всеки две инерциални отправни системи са напълно равноправни. Но щом с никакви опити не може да открием движението, какъв е смисълът на понятието абсолютно пространство? За Нютон, като дълбоко религиозен човек, то е имало в много голяма степен теологичен смисъл – той го е разглеждал като необходимо за вместилище на Бога. Последвалите през 18 и 19 век открития в областта на електричеството, магнетизма, астрономията и светлината придават нов смисъл на това понятие. Смятало се е, че цялото пространство е запълнено с особена среда наричана *етер*, която служи за посредник на взаимодействията между телата. В края на 19 - началото на 20 век вече е било ясно, че уравненията на електродинамиката – раздела от физиката, който изучава движението на заредените тела, не са инвариантни относно преобразованията на Галилей, следователно, чрез немеханични опити може да бъде регистрирано движението спрямо абсолютната отправна система – етера. Такива експерименти са били проведени, най-известният от тях е на Майкелсон и Морли през 1881г. Целта е била да се сравни разпространението на светлинен лъч в противоположни посоки на движението на Земята. Използва се, че скоростта v на обикаляне на Земята около Слънцето е много голяма – около 30 km/s. Ефекта, който е трябвало да бъде регистриран е от порядъка на $\frac{v^2}{c^2} = 10^{-8}$, където $c = 300\,000\text{km/s}$ е скоростта на светлината. Въпреки малката величина конструираният уред, наречен *интерферометър на Майкелсон*, е бил достатъчно чувствителен за да го регистрира, но ефект не е бил открит. Изводът от експеримента е, че светлината се разпространява с еднаква скорост във всички посоки. Той противоречи на преобразованията на Галилей, според които, когато светлината се разпространява по посока на движението на Земята скоростите им трябва да се събират, а в обратна посока да се изваждат.

Полученото противоречие е било разрешено по забележителен начин от Айнщайн през 1905г. в *специалната теория на относителността* (релятивистка теория). Тя се основава на 2 принципа:

- *принцип на относителността* – обобщение на механичния принцип на относителността на Галилей. Според принципа на относителността на Айнщайн **всички** явления протичат по еднакъв начин в отправните системи, които се движат равномерно и праволинейно една спрямо друга;
- *постоянство на скоростта на светлината* – във вакуум тя е еднаква във всички отправни системи, независимо от скоростта, с която се движат една

спрямо друга.

Приемането на тези два постулата води до преразглеждане на понятията за пространство и време. Оказва се, че времето протича различно в неподвижната и движещата се координатни системи, две събития, които са едновременни в една отправна система в друга могат да бъдат неедновременни. Ще илюстрираме това с един пример.



Фигура 1.15: Разпространение на светлината в неподвижна и подвижна системи.

Да конструираме светлинен часовник, който се състои от източник на светлина и огледалце на разстояние l от него. Часовникът е ориентиран по оста y и се движи заедно със системата K' . Да го погледнем от двете координатни системи. В подвижната система K' той е неподвижен и едно тиктакане се получава, като излъченият вертикално нагоре лъч светлина на височина l се отразява и се връща обратно. Разстоянието $2l$ той изминава за време $\Delta t'$, измерено в системата K' . Понеже скоростта на светлината е c , в сила е:

$$\Delta t' = \frac{2l}{c}$$

В неподвижната система светлината се движи по хипотенузите на правоъгълни триъгълници, показани на фиг.1.15. Пътят е изминат със същата скорост c , за време Δt в системата K и затова:

$$2l = \sqrt{(c\Delta t)^2 - (v_0\Delta t)^2}$$

Заменяме $2l$ в по-горното уравнение и получаваме:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}}$$

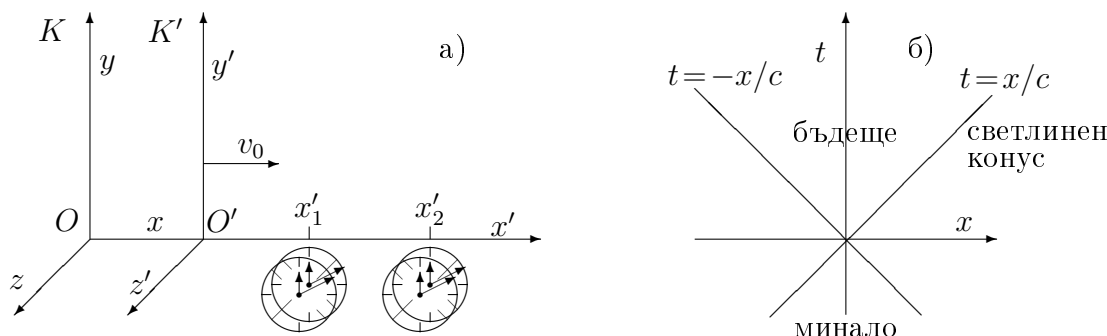
Виждаме, че времето, изминало между две събития в неподвижната система е γ пъти по-голямо отколкото от това в подвижната система, където:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}$$

1.5.3 Лоренцови трансформации

От показаното следва, че времето между две събития в различни инерциални отправни системи е различно.

Всъщност схемата от източник на светлина, огледалце и приемник на светлина може да бъде използвана като часовник за измерване на времето. Часовникът тиктака с период Δt в системата K и $\Delta t'$ в системата K' . В класическата механика времето е абсолютно т.е. всички часовници "цъкат" еднакво във всички инерциални отправни системи, затова, когато се случи някъде някаво събитие ние просто можем да си погледнем часовника, където и да се намираме и да отчетем времето, т.е. пространството и времето са отделени и независими едно от друго. Видяхме обаче, че приемането на постулатите на Айнщайн води, до това, че ходът на часовниците е различен в различните координатни системи – това налага да сложим във всяка координатна система часовници, тях можем да ги синхронизираме използвайки например светлинни сигнали. Това е показано на фиг.1.16 а), където са показани два часовника, поставени в точките x_1 и x_2 в системата K и два други часовника поставени в същите точки (но с координати x'_1 и x'_2) в системата K .



Фигура 1.16: Синхронизиране на часовниците.

Освен че времето е различно и събитията, които са едновременни в едната система не са едновременни в другата. Това може лесно да се види ако от средата на отсечката $x'_1 x'_2$ пуснем наляво и надясно светлинни лъчи – те ще пристигнат едновременно в точките x'_1 и x'_2 . В системата K обаче точката x_2 "бяга" от светлинния лъч, а точката x_1 се движи срещу него, така че той ще пристигна по-рано в точка x_1 отколкото в точка x_2 , следователно двете събития, които са едновременни в системата K' не са едновременни в системата K .

Видяхме, че времето е относително – то е различно в различните отправни системи. Това води до промяна във връзките между координатите на точка в неподвижната и движещата се система. В граничния случай, когато $v_0 \ll c$, те трябва да преминават в преобразованията на Галилей. Тяхната модификация в случай на големи скорости се нарича *Лоренцови трансформации*:

$$\begin{aligned}
 y' &= y, & z' &= z \\
 x' &= \frac{x - v_0 t}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}}, \\
 t' &= \frac{t - \frac{v_0 x}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}}
 \end{aligned}$$

Освен времето, от движещата се отправна система и дължината изглежда различно. Да измерим координатите на началото x_1 и края x_2 на едно тяло в един и същи момент t в неподвижната система K . Дължината му е $l = x_2 - x_1$. Използвайки Лоренцовите преобразувания получаваме за началото и края на тялото в подвижната система:

$$\begin{aligned}
 x'_1 &= \frac{(x_1 - v_0 t)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}}, \\
 x'_2 &= \frac{(x_2 - v_0 t)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}}
 \end{aligned}$$

Изваждаме двете уравнения и означавайки с $l' = x'_2 - x'_1$ дължината на тялото в движещата се система – получаваме че движещото се тяло се скъсява в посоката на движение:

$$l = l' \sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}$$

Променя се и правилото за събиране на скорости. Ако означим изменението на x координатата в система K за време Δt с Δx , а в система K' за време $\Delta t'$ с $\Delta x'$ то:

$$\begin{aligned}
 \Delta x' &= \gamma (\Delta x - v_0 \Delta t), \\
 \Delta t' &= \gamma \left(\Delta t - \frac{v_0 \Delta x}{c^2} \right)
 \end{aligned}$$

Разделяйки уравненията получаваме правилото за релятивистко събиране на скорости:

$$v' = \frac{v - v_0}{1 - \frac{v v_0}{c^2}}$$

Лесно се проверява, че ако $v = c$ то и $v' = c$ и вторият принцип на Айнщайн е удовлетворен.

1.5.4 Елементи на релятивистката динамика

Съгласно принципа на относителността, уравненията трябва да бъдат инвариантни относно преобразованията на Лоренц. Това е изпълнено за уравненията на

електродинамиката, откъдето първо те са били получени. За да бъде инвариантно обаче уравнението на динамиката е необходимо да се модифицира понятието маса. Това се прави, като се погледне ударът между две еднакви тела от двете координатни системи K и K' , и приложим закона за запазване на импулса.

Да разгледаме две еднакви частици, които се движат в системата K една срещу друга със скорост u . В движещата се система K' , съгласно релятивисткото правило за събиране на скорости, те ще бъдат:

$$u'_1 = \frac{u - v_0}{1 - \frac{uv_0}{c^2}}$$

$$u'_2 = \frac{-u - v_0}{1 + \frac{uv_0}{c^2}}$$

Да означим масите на двете частици в движещата се система с m'_1 и m'_2 , и нека след удара те да залепнат една за друга, в системата K те остават неподвижни, затова в K' двете частици се движат със скорост $-v_0$. Понеже на системата от 2 частици не действат външни сили, то импулса се запазва и следователно:

$$m'_1 u'_1 + m'_2 u'_2 = -(m'_1 + m'_2) v_0$$

$$\frac{m'_1}{m'_2} = -\frac{u'_2 + v_0}{u'_1 + v_0} = \frac{1 - \frac{uv_0}{c^2}}{1 + \frac{uv_0}{c^2}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{u'^2_2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{u'^2_1}{c^2}}}$$

Вижда се, че произведението $m'_2 \sqrt{1 - \frac{u'^2_2}{c^2}}$ остава постоянно, което означава, че масата в движещата система се променя. Ако означим масата на тялото в неподвижната система с m_0 , то масата в подвижната система, движеща се със скорост v става:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Съответно импулсът в движещата се система става:

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Уравнението на релятивистката динамика остава същото, но с променен импулс и във вида:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

Може да се покаже, че то е инвариантно относно преобразованията на Лоренц.

При малки скорости на телата $v \ll c$ всички уравнения на специалната теория на относителността преминават в съответните от класическата Нютонова механика. Да видим как се променят формулите за енергията. От формулата за масата получаваме:

$$m^2 c^2 = m^2 v^2 + m_0^2 c^2 \quad (1.3)$$

Диференцираме по t и получаваме:

$$2m \frac{d(mc^2)}{dt} = 2mv \frac{d(mv)}{dt}$$

$$\frac{d(mc^2)}{dt} = \vec{v} \cdot \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{dA}{dt}$$

Следователно $A = \Delta(mc^2)$ и енергията на движещото тяло трябва да бъде:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + const$$

Константата не трябва да зависи нито от масата нито от скоростта, затова тя може да бъде положена да бъде нула и окончателно за *пълната енергия* на тялото получаваме:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mc^2$$

Ако тялото е в покой $v = 0$, и енергията в покой е:

$$E_0 = m_0 c^2$$

Кинетичната енергия се определя като разликата от пълната енергия и енергията в покой.

$$E_k = E - m_0 c^2$$

От формула (1.3) следва, че енергията и импулса на едно тяло са свързани:

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + (m_0 c^2)^2}$$

Формулата $E = mc^2$ се нарича *формула на Айнщайн за връзката между маса и енергия* или *закон за еквивалентността между масата и енергията*.

От трансформациите на Лоренц се вижда, че времето и пространствените координати са свързани. Математическия обект, който се получава от обединението им се нарича 4-вектор, той се дефинира в четиримерно пространство-време на Минковски. 4-вектор се получава и при обединението на енергията и импулса. Законът за запазване на енергията и импулса се обединяват в един закон за запазване на четиримерния импулс.

Глава 2

Трептения и вълни

2.1 Хармонични трептения

Движения, които се повтарят през равни периоди от време се наричат *периодични*. Периодичните трептения възникват при малки отклонения на всяка система от равновесното ѝ положение – ето защо за тяхното изучаване се отделя много място във физиката, както в класическата, така и в квантовата механика. Понеже всяка периодична функция може да се представи като сума от хармонични функции (ред на Фурие) много важен е случаят, когато трептенията са хармонични.

2.1.1 Обща характеристика на хармоничното трептение

Хармонични са тези периодични трептения, които се извършват по закона :

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

или

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Понеже $\sin(x) = \cos(x + \frac{3\pi}{2})$, то е все едно кой от двата закона ще се използва. Прието е да се използва първия – косинусов закон, но както ще покажем по-нататък има математически трик (комплексното представяне), който позволява да се използват едновременно и двата закона.

Величините фигуриращи в закона имат следните наименования :

- A се нарича *амплитуда*;
- ω е *кръговата честота*;
- $\omega t + \varphi_0$ е *фазата на трептенията*;
- φ_0 се нарича *начална фаза*.

Кръговата честота е свързана с *честотата* на трептенията ν :

$$\omega = 2\pi\nu$$

Честотата е броят трептения за единица време, а *периодът* е времето за едно трептение. Двете величини са свързани :

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$$

2.1.2 Примери за хармонични трептения

В раздела за сили видяхме, че при отклонението x на пружина от равновесното ѝ положение възниква еластична сила с големина $F = kx$, насочена в посока обратна на движението, затова уравнението на движението е :

$$ma = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Да разделим двете страни на m и да положим $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. Уравнението, което се получава се нарича *диференциално уравнение на хармоничните трептения* :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

Замествайки с $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ виждаме, че то се удовлетворява от закона за хармоничните трептения. Като го диференцираме по времето получаваме скоростта :

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Кинетичната енергия на хармоничното трептение е :

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0),$$

а потенциалната енергия получаваме от :

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

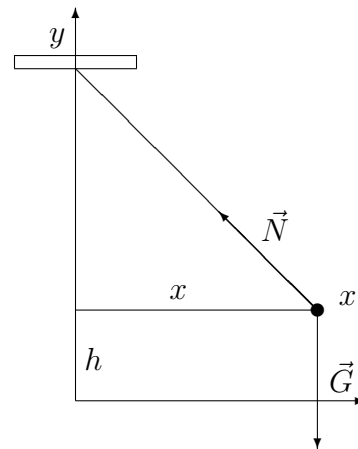
Събирайки двете уравнения за пълната енергия получаваме :

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 [\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)] = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2$$

Друга задача, решена още от Галилей е задачата за малките колебания на материална точка с маса m , закачена за неразтеглива нишка с дължина l . На нея ѝ действат силата на тежестта \vec{G} и силата на опъване на нишката \vec{N} . Нека точката се е отклонила на някакъв ъгъл така, че да се повдигне на височина h по вертикалата. Тя може да се намери от правоъгълния триъгълник на (фиг.2.1).

$$h = l - \sqrt{l^2 - x^2},$$

където x е отклонението от равновесното положение на точката.



Фигура 2.1: Математическо махало.

Като използваме, че $x \gg l$ можем да разложим в ред по x/l и пренебрегвайки членовете от по-висок порядък получаваме :

$$h = l - l \left(1 - \frac{x^2}{2l^2} \right) = \frac{x^2}{2l},$$

следователно потенциалната енергия на точката е:

$$E_p = mg \frac{x^2}{2l}$$

Сравнявайки с формулата за потенциалната енергия на хармоничните трептения на тяло $E_p = m\omega^2 x^2/2$, виждаме, че зависимостта от x е същата и те съвпадат ако за кръговата честота на трептене положим :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Съответно за периода на трептенията на махало получаваме формулата на Галилей :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

2.2 Представяне на трептенията

Независимо от вида на трептенията те се описват математически по един и същи начин. Разработени са методи, които значително опростяват пресмятанията, на които ще се спрем накратко.

2.2.1 Векторно представяне на хармоничните трептения

Проекцията x на вектор \vec{A} , който сключва ъгъл φ с оста x , върху тази ос е $x = A \cos(\varphi)$. Ако векторът се върти с постоянна ъглова скорост ω е в сила $\varphi = \omega t + \varphi_0$, следователно проекцията x на \vec{A} ще трепти по хармоничен закон $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$. На всяко хармонично трептене може да се съпостави вектор, въртящ се с ъглова скорост равна на кръговата честота и начален ъгъл равна на началната фаза. Понякога задачите, в които участват хармонични трептения е по лесно да се решават, чрез съответните им вектори и след това от тях да се получи хармоничното трептене.

2.2.2 Комплексно представяне на хармоничните трептения

Същата идея за заместването на хармоничните трептения с друг математически обект, с който задачите се решават по-лесно е приложена при комплексния метод, в основата на който лежи *формулата на Ойлер* :

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t),$$

където i е имагинерната единица. Хармоничното трептение може да се представи като реална част на комплексната функция $\hat{x}(t) = Ae^{i(\omega t + \varphi_0)}$

$$A \cos(\omega t + \varphi_0) = \operatorname{Re}(Ae^{i(\omega t + \varphi_0)})$$

Ако въведем комплексната амплитуда $\hat{A} = Ae^{i\varphi_0}$ можем да запишем **условното** равенство :

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) = \hat{A}e^{i\omega t},$$

където се подразбира равенство само на реалните части т.е. $x(t) = \operatorname{Re}(\hat{A}e^{i\omega t})$. Лесно се проверява, че :

$$\frac{dx}{dt} = i\omega \hat{A}e^{i\omega t}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = (i\omega)^2 \hat{A}e^{i\omega t}$$

следователно диференцирането на такива изрази се свежда до умножаване по $i\omega$.

2.2.3 Събиране на хармонични трептения

При наслагване на две трептения с еднаква честота, които се извършват в едно и също направление се получава хармонично трептение със същата честота. Ще приложим комплексният метод за да намерим амплитудата и началната фаза на резултантното трептение. На двете трептения, които са с различни амплитуди и начални фази:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

и на резултантното трептение: $x = A \cos(\omega t + \varphi)$, съпоставяме комплексните функции:

$$\hat{x}_1(t) = \hat{A}_1 e^{i\omega t}, \quad \hat{x}_2(t) = \hat{A}_2 e^{i\omega t}, \quad \hat{x}(t) = \hat{A} e^{i\omega t}$$

с комплексни амплитуди $\hat{A}_1 = A_1 e^{i\varphi_1}$, $\hat{A}_2 = A_2 e^{i\varphi_1}$ и $\hat{A} = A e^{i\varphi}$. Понеже $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, то $\hat{x} = \hat{x}_1 + \hat{x}_2$ и следователно

$$\hat{A} e^{i\omega t} = \hat{A}_1 e^{i\omega t} + \hat{A}_2 e^{i\omega t}$$

$$\hat{A} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2$$

Вижда се, че резултантната комплексна амплитуда е сума от двете комплексни амплитуди. Да преминем от комплексни числа към реални. Като използваме, че модулът на комплексното число $\hat{A} = A e^{i\varphi}$ е:

$$|\hat{A}|^2 = \hat{A} \hat{A}^* = A^2 e^{i\varphi} e^{-i\varphi} = A^2$$

следователно,

$$|\hat{A}|^2 = A^2 = (A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2})(A_1 e^{-i\varphi_1} + A_2 e^{-i\varphi_2})$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 (e^{i\varphi_1} + e^{-i\varphi_2})$$

Като съберем формулата на Ойлер и комплексно-спрегнатата ѝ

$$e^{it} = \cos t + i \sin t, \quad e^{-it} = \cos t - i \sin t,$$

получаваме :

$$2 \cos(t) = (e^{it} + e^{-it}), \quad \text{следователно :}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Резултантната амплитуда A е максимална, когато $\varphi_1 - \varphi_2 = n\pi$, ако $\varphi_1 - \varphi_2 = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, където $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$ тя е минимална.

Началната фаза се получава от формулата за аргумента на комплексно число :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{Im}(\hat{A})}{\operatorname{Re}(\hat{A})}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$

2.2.4 Затихващи трептения

Когато разглеждахме движението на тяло закачено за пружина пренебрегнахме силата на триене. Да приемем сега, че на тялото действа сила на триене, която е пропорционална на скоростта и обратно на посоката на движението $F_{\text{тр}} = -rv$. Уравнението на движението става :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - rv$$

Правим същото полагане, както в случая без триене $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ и $\frac{r}{m} = 2\beta$, и получаваме :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

Ще използваме комплексният метод, при него диференцирането по t е еквивалентно на умножаване по $i\omega$. Търсим решение във вида $\hat{x} = \hat{A}e^{i\omega t}$, вместо диференциалното уравнение получаваме алгебрично :

$$(i\omega)^2 \hat{A}e^{i\omega t} + 2\beta(i\omega)\hat{A}e^{i\omega t} + \omega_0^2 \hat{A}e^{i\omega t} = 0$$

Съкращавайки $\hat{A}e^{i\omega t}$, получаваме :

$$-\omega^2 + 2i\beta\omega + \omega_0^2 = 0$$

Квадратното уравнение има две решения :

$$\omega = -i\beta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Да положим $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ и заместим с полученото в $\hat{x} = \hat{A}e^{i\omega t}$, получаваме : $\hat{x} = \hat{A}e^{-\beta t}e^{\pm i\omega' t}$. След като вземем реалната част окончателно получаваме :

$$x = Ae^{-\beta t} \cos(\omega' t + \varphi_0)$$

От полученото уравнение се вижда, че амплитудата намалява експоненциално във времето. В зависимост от вида на ω' получаваме следните възможности :

- при $\omega_0 > \beta$ решението е периодично с експоненциално намаляваща амплитуда и честота ω' ;
- при $\omega_0 \leq \beta$ движението е аperiodично

$$x = Ae^{-\left(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right)t}$$

Поглъщането на енергия се нарича *дисипация*.

2.2.5 Принудени трептения

Когато върху системата действа външна периодична сила получаващите се трептения се наричат *принудени*. Трептенията на системата в този случай са *хармонични*, с честота равна на честотата на принуждаващата сила. При произволна периодична сила резултатът може да се представи като сума от хармонични трептения с честоти кратни на основната, умножени по коефициент наречен коефициент на Фурие.

Нека на тяло освен еластичната сила kx и силата на триенето $-rv$ действа хармонична сила $F = f_0 \cos(\omega t)$. Тогава уравнението на движението е :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = a_0 \cos(\omega t),$$

където сме използвали същите означения като при затихващите трептения и $a_0 = \frac{f_0}{m}$. И това уравнение ще решим използвайки комплексния метод. Заместваме x с $\hat{A}e^{i\omega t}$ използваваме, че $\frac{d}{dt} \rightarrow i\omega t$ и получаваме алгебричното уравнение :

$$-\hat{A}\omega^2 + 2i\beta\omega\hat{A} + \omega_0^2\hat{A} = a_0,$$

След като извършим съкращенията получаваме :

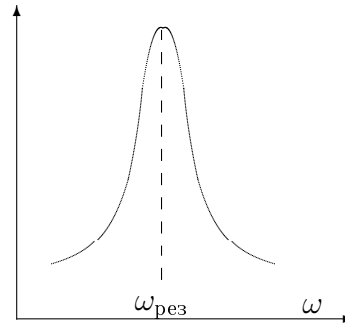
$$\hat{A} = \frac{a_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\beta\omega}$$

Като използваме, връзката между комплексната и реалната амплитуда $A^2 = |\hat{A}|^2$ получаваме :

$$A = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

Вижда се, че амплитудата зависи от честотата на външната сила и има максимум, когато знаменателят е минимален.

Явлението, при което при определена честота на принуждаващата сила амплитудата на трептенията става максимална се нарича *резонанс*, а честотата при



Фигура 2.2: Амплитуда на принудените трептения в зависимост от честотата.

която настъпва това явление – *резонансна честота*. Диференцираме знаменателя, приравняваме резултата на нула и за резонансната честота $\omega_{\text{рез}}$ получаваме :

$$\omega_{\text{рез}}^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2$$

Трептящите системи често се характеризират с величината $Q = \frac{\pi\nu}{\beta}$, наречена *качество*. Колкото качеството е по-голямо, толкова резонансната крива е по-остра (фиг.2.2). За началната фаза по същия начин както за затихващите трептения получаваме:

$$\text{tg}\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Решението, което получихме се явява решение за *установилите се колебания*. Пълното решение включва и добавка от затихващи трептения, които отговарят на решение на уравнението с $f_0 = 0$.

2.3 Вълни

Вълните представляват процес на разпространение на трептения. Те могат да имат различна природа, но тяхното математическо описание, както и физическите термини са едни и същи.

2.3.1 Общо описание на вълните

Да предположим, че цялото пространство е изпълнено с непрекъсната материя – разделът от физиката, който се занимава с изучаването на такива среди се нарича *физика на непрекъснатите среди*. Ще предположим, че там действат само еластични сили и нека \vec{r} е радиус-векторът на точка от средата, която се намира в равновесно положение. Да означим *отклонението* на точката от него с ξ – в общия случай отклонението трябва да бъде векторна величина, но за простота ние ще приемем, че това е скалар. Величината ξ зависи не само от \vec{r} , а следователно от координатите на точката x, y, z , но и от времето t , така, че:

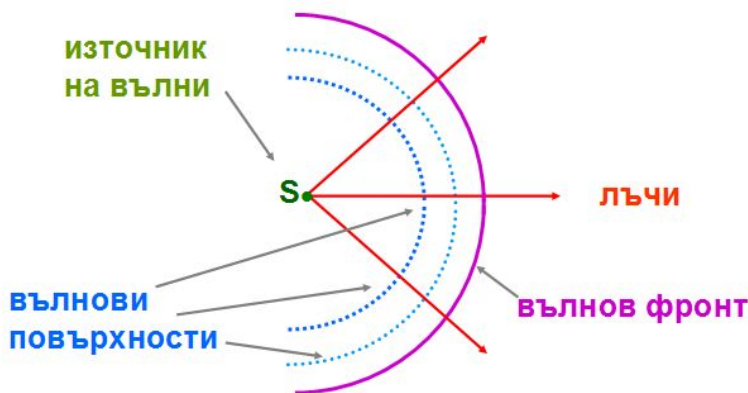
$$\xi = \xi(x, y, z, t)$$

Виждаме, че отклонението ξ представлява функция на трите координати и времето – такава математическа функция, която е дефинирана във всяка точка на пространството и времето се нарича *поле*. Обърнете внимание, че координатите и времето влизат напълно равноправно във функцията.

Ако първоначално цялата среда е неподвижна и отклоним от равновесното ѝ положение една точка, то под действието на еластичните сили тя ще се стреми да се върне в равновесното си положение, при което ще приведе в движение и съседните точки. Така в средата ще започне да се разпространява смущение, а точките през които то преминава ще трептят около равновесните си положения.

Скоростта, с която се разпространява смущението се нарича *скорост* на вълните, а процесът на разпространението му – **вълна** или вълнов процес. Среда, в която вълните се разпространяват с еднакви скорости във всички посоки се наричат *изотропни*, в противен случай те са *анизотропни* – така например скоростта

на звука и на светлината в кристалите е различна в зависимост от това по каква ос се разпространява вълната. Множеството от последните точки, до които е стигнало смущението се нарича *фронт* на вълната. Скоростта v се определя само от свойствата на средата, а не от причините, които са предизвикали вълните.



Фигура 2.3: Вълнови повърхности, фронт на вълната и лъчи. Лъчите са перпендикулярни на вълновите повърхности.

Да разгледаме разпространението на вълна, при което точките на средата трептят около равновесното си положение по хармоничен закон:

$$\xi = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Величината $\omega t + \varphi_0$ се нарича *фаза* на вълната, също както и при хармоничните трептения. Геометричното място от точки, които имат еднакви фази се нарича *вълнова повърхност*. Според вида на вълновата повърхност различаваме: плоски, сферични и цилиндрични вълни. Според посоката на извършване на трептенията вълните са:

- надлъжни вълни – за тях трептението е по посока на разпространение на вълната.
- напречни вълни, ако трептението е напречно на посоката на разпространение.

Минималното разстояние между 2 вълнови повърхности, които трептят с фазова разлика 2π се нарича *дължина на вълната*. За тях отклоненията ще бъдат еднакви и следователно точките им ще трептят напълно синхронно, все едно, че са свързани с твърда връзка.

2.3.2 Уравнение на плоска вълна

Ще разгледаме разпространението на вълни в среда, точките на която трептят хармонично. Ако всички точки от равнината $x = 0$ трептят по закона $A \cos \omega t$, то смущение, създадено в тази равнина, разпространявайки се *надясно* със скорост v , ще достигне точка x след време $\frac{x}{v}$, следователно трептението ѝ закъснява с

това време – така е и със всички точки от равнината, минаваща през точка x . Фазата им ще бъде $\omega(t - \frac{x}{v})$ и отклонението ξ на точка x в момента t ще бъде:

$$\xi(x, t) = A \cos \omega(t - \frac{x}{v})$$

Това съотношение се нарича уравнение на *плоска* вълна разпространяваща се в положителна посока по оста Ox със скорост v . Величината $k = \frac{\omega}{v}$, която има размерност m^{-1} се нарича *вълново число*. Използвайки комплексния метод уравнението може да се запише като:

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx) = A e^{i(\omega t - kx)}, \quad a$$

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t + kx) = A e^{i(\omega t + kx)}$$

е уравнението на вълна разпространяваща се в отрицателна посока.

В общия случай, когато трептенията се разпространяват в направление определено от единичния вектор \vec{n} , разстоянието, което изминава вълната за да достигне точка x е $\vec{n} \cdot \vec{r}$ и закъснението става $\frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{v}$. Да означим с \vec{k} векторът $k\vec{n}$, който се нарича *вълнов вектор*. Уравнението на плоска вълна, разпространяваща се в посока определена от \vec{k} е:

$$\xi(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) = A e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

Тя се нарича плоска, понеже всички точки, за които $\vec{k} \cdot \vec{r} = const$ лежат в една равнина и следователно вълновите повърхности с еднакви фази са плоскости. Две точки, които се намират на разстояние една дължина на вълната λ по оста x имат фази различаващи си с 2π :

$$\varphi_1 = \omega t - kx_1, \quad \varphi_2 = \omega t - kx_2$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = k(x_2 - x_1) = k\lambda = 2\pi$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$$

Връзката между трите величини v , ω и k са дава от *дисперсионното съотношение*:

$$v = \frac{\omega}{k}$$

Скоростта v се нарича *фазова скорост*. *Груповата* скорост е $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ – това е скоростта, с която се предава информацията, максималната ѝ стойност е скоростта на светлината във вакуум, за разлика от фазовата скорост, която в някои среди може да бъде и по-голяма.

2.4 Вълново уравнение

Уравнението, което удовлетворява всяка вълна е частно диференциално уравнение от II ред. То се среща в най различни дялове на физиката, описва разпространение на вълните в разнообразни среди.

2.4.1 Вълново уравнение, сферична и цилиндрична вълна

Ще използваме уравнението на плоска вълна, за да установим неговия вид. Да диференцираме $\xi = Ae^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ по x , y , z и t , получаваме:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -ik_x \xi, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -ik_y \xi, \quad \frac{\partial \xi}{\partial z} = -ik_z \xi, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = i\omega \xi$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -k_x^2 \xi, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = -k_y^2 \xi, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -k_z^2 \xi, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 \xi$$

И като използваме, че $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$ получаваме общата форма на вълновото уравнение:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

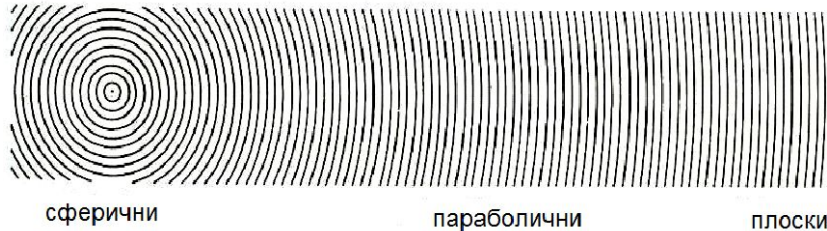
или използвайки оператора на Лаплас $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ записваме по-кратко:

$$\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

С непосредствено диференциране се проверява, че най-общото решение на вълновото уравнение за вълна разпространяваща се в двете посоки по оста x е:

$$\xi = f(x - vt) + g(x + vt),$$

където f и g са произволни функции.



Фигура 2.4: Видове вълни.

Когато източникът създаващ вълните е сферически симетричен (например точков) се получават сферични вълни, които на големи (спрямо размерите на източника) разстояния имат уравнение:

$$\xi(r, t) = \frac{C}{r} e^{i(\omega t - kr)}$$

Ако източникът е със цилиндрична симетрия, на големи разстояния:

$$\xi(r, t) = \frac{C}{\sqrt{r}} e^{i(\omega t - kr)}$$

Степента на r в знаменателя на уравненията е следствие от разпространението на енергията на вълната. Точките на средата извършват хармонични трептения

с енергия $E = \frac{mA^2\omega^2}{2}$, следователно и енергията на вълната е пропорционална на $A^2\omega^2$. Ако една точка предизвика сферична вълна, то енергията на вълната на разстояние r ще бъде постоянна $A\omega^2 \cdot 4\pi r^2 = const$ (запазва се). От тук следва, че амплитудата е обратно пропорционална на r , с аналогично разглеждане можем да получим зависимостта на амплитудата от разстоянието за цилиндрична вълна.

2.4.2 Интерференция на вълни

Вълновото уравнение е *линейно*, което означава, че сумата на две негови решения също е решение, следователно в една среда могат да се разпространяват вълни, получени от няколко източника, независимо една от друга, като резултантната вълна е сума от отделните вълни – това твърдение се нарича *принцип на суперпозицията*. Ако вълните имат много големи амплитуди, отклоненията на точките от равновесното им положение и силите престават да бъдат еластични, вълновото уравнение става невалидно и принципът на суперпозицията неприложим. Такива среди се наричат *нелинейни*.

Ще разгледаме разпространението на 2 вълни получени от 2 *кохерентни* точкови източника излъчващи с еднаква честота:

$$\xi_1(r_1, t) = A_1 e^{i(\omega t - kr_1)}, \quad \xi_2(r_2, t) = A_2 e^{i(\omega t - kr_2)}$$

Резултантното трептение е:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2$$

Терминът *кохерентни* означава, че източниците имат постоянна във времето фазова разлика. Ако фазовата разлика се мени по случаен начин във времето то такива източници се наричат *некохерентни*.

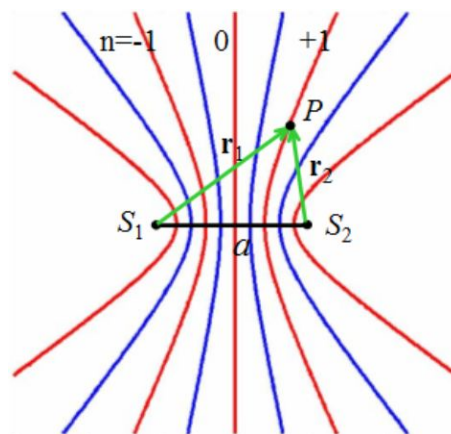
В нашия случай фазовата разлика е $\varphi_2 - \varphi_1 = k(r_2 - r_1)$ и като използваме формулата, която получихме за събиране на хармонични трептения с еднакви направления, от раздела за амплитудата на резултантната вълна имаме:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos [k(r_2 - r_1)]}$$

Максималната амплитуда се достига при фазова разлика $2\pi n$, където n е произволно цяло число и от $k(r_2 - r_1) = 2\pi n$, получаваме

$$k(r_2 - r_1) = 2\pi n = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$$

$$r_2 - r_1 = 2n \frac{\lambda}{2}$$



Фигура 2.5: Интерференция от два кохерентни източника.

Аналогично за минималната амплитуда от $\varphi_2 - \varphi_1 = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$ получаваме:

$$r_2 - r_1 = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}$$

При кохерентни точкови източници, в пространството се получават области, в които амплитудите са големи, а в други малки. В точките, за които разликата в разстоянията до източниците е *четно число полувълни* се получава **максимуми**, а ако тя е *нечетно* число полувълни има **минимуми**. Явлението, при което при суперпозиция на вълни се получават максимуми и минимуми се нарича *интерференция* на вълните.

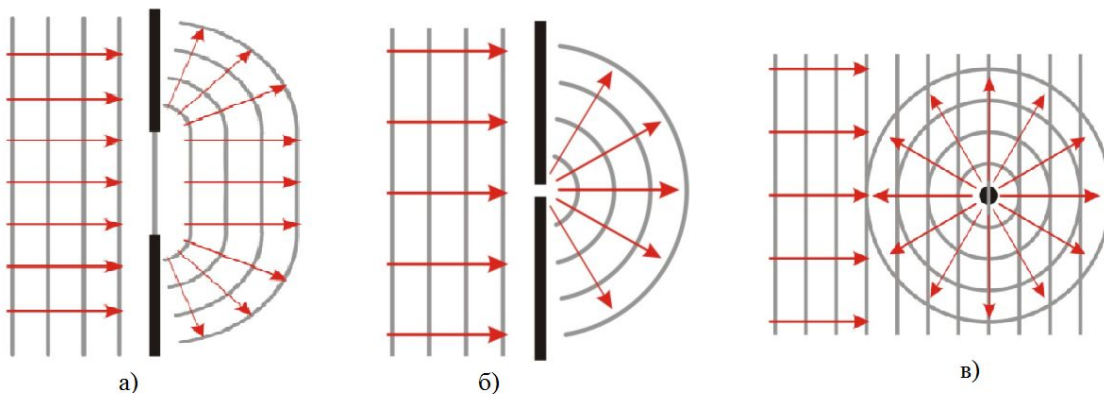
При 2 некохерентни източника $\varphi_2 - \varphi_1$ е случайна величина и понеже средната стойност на $\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ е нула то:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2$$

Видяхме, че енергията на вълните е пропорционална на квадрата на амплитудата. *Интензитета* на вълните се дефинира като енергията на вълната преминаваща за единица време през единица площ. Следователно, при некохерентни източници интензитета на резултантната вълна е сума от интензитетите на отделните вълни. В този случай не се наблюдават максимуми и минимуми.

2.4.3 Дифракция

Дифракцията е явление, което възниква при отклонението на вълната от праволинейното ѝ разпространение при преминаване през силно нехомогенни среди, например, прегради и отвори. В резултат на дифракцията вълните се разпространяват в областта на геометричната сянка. Дифракцията е следствие от интерференцията и в резултат се получават области на усилване и отслабване на вълните.



Фигура 2.6: Дифракция а) от широк отвор, б) от тесен отвор, в) от сфера. С червени линии са нарисувани лъчите.

На фиг.2.6 е показано как вълните преминават през прегради и заобикалят препятствие.

Глава 3

Молекулна физика

3.1 Термодинамика

Движението на една частица може да бъде описано ако е известна силата, която действа върху нея и началното ѝ положение. Случая, когато имаме много частици е по-сложен. За да се опише такова движение в механиката се използват различни модели, които водят до значително опростяване. Такива са например абсолютно твърдото тяло, чието движение се описва само с 6 параметъра – трите координати на центъра на масите му и 3 ъгъла на завъртане, и модела на непрекъснатата среда, където параметрите са безбройно много – това са всички точки на пространството и времето, но тяхната непрекъснатост значително опростява задачата. Реалните тела са изградени от молекули, които от своя страна имат структура. Задачата за описанието на тяхното движение със средствата на класическата механика е изключително трудна. Големият брой на молекулите обаче позволява използването на статистически методи. Разделът на физиката, който използва този подход се нарича статистическа физика.

3.1.1 Статистически и термодинамичен метод

Исторически първият метод възникнал през 19 век за изучаване на топлинните явления е термодинамичния. Термодинамиката е аксиоматична наука. Тя се нарича още *феноменологична* от *phenomenon* (явление), понеже се изгражда на основата на общи принципи, които се явяват обобщение на опита. В нея се въвеждат понятия като *температура* и *количество топлина*, които са макроскопически величини отразяващи състоянието на ситема от голям брой микрочастици. Статистическият метод обяснява макроскопичните свойства на телата въз основа на техния строеж, установява връзките между микроскопическите и макроскопическите параметри, обяснява принципите на термодинамиката на основата на принципите на динамиката и изяснява границите на тяхната приложимост.

Физическите величини, които характеризират една система се наричат параметри на състоянието. При газовете, които ще изучаваме по-нататък това са: маса – m , обем – V , налягане – p и температура – T .

Налягането се дефинира като силата действаща върху единица площ:

$$p = \frac{dF}{dS}$$

Понятието *температура* се въвежда за да характеризира равновесието на системата (в класическата термодинамиката се изучават само такива състояния). То се базира на така наречения *нулев принцип на термодинамиката*. Според него

ако системите A и B са в термодинамично равновесие, а също B и C , то и A и C се намират в термодинамично равновесие.

Равновесно е такова състояние, при което параметрите на системата не се изменят във времето, при неизменни външни условия. Ако приведем в контакт две системи с еднакви температури, тяхното състояние не се променя. От молекулно-кинетична гледна точка температурата характеризира кинетичната енергия на хаотичното движение на молекулите, а *количеството топлина* – енергията, която се обменя при контакта между две системи.

За измерване на температурата в система SI се използва абсолютната термодинамична скала, при която не може да има температура по ниска от 0° келвина (K), затова тя се нарича абсолютна нула. Връзката с целзиевата температура t е:

$$T = 273,15 + t$$

3.1.2 Термодинамични системи и процеси

Термодинамичната система е набор от макроскопични тела, които могат да обменят енергия помежду си и с външната среда. Тя се характеризира с малък на брой параметри. Опитът показва, че ако термодинамичната система не взаимодейства с други, то след известно време, наречено време на релаксация, в нея се установява *термодинамично равновесие*, при което всички термодинамични параметри остават постоянни. Например ако системата е газ запълващ даден обем, то в равновесие има постоянно налягане и температура. Състояние, при което поне един от параметрите няма определена стойност, се нарича неравновесно.

Термодинамичният процес е преходът на система от едно състояние в друго. Такъв преход винаги е свързан с нарушаване на равновесието на системата. Ако този процес протича много бавно, можем да считаме, че отклонението на параметрите от равновесните им значения е пренебрежимо малко. Той може да се разглежда като непрекъснатата поредица от равновесни състояния ако е много по-бавен в сравнение с процесите на установяване на термодинамично равновесие в дадена система. При промяна на посоката на равновесния процес (например замяна на свиването на газа с разширение), системата ще премине през същите равновесни състояния, но в обратен ред. Следователно равновесните процеси са обратими.

Обратимият процес се характеризира с безкрайно бавна промяна на термодинамичните параметри (плътност, налягане, температура и т.н.), които определят равновесието на системата. Такива процеси се наричат квазиравновесни.

Понятията за равновесно състояние и обратим процес играят важна роля в термодинамиката. Всички количествени заключения на класическата термодинамика са приложими само за равновесни състояния и обратими процеси.

Термодинамична система, която не обменя нито енергия, нито материя с околните тела, се нарича изолирана. Една изолирана система в крайна сметка достига до състояние на термодинамично равновесие. В това състояние, както и в стационарното състояние, параметрите на системата остават непроменени във времето. От съществено значение е, че в равновесно състояние параметрите, които не зависят от масата или броя на частиците (налягане, температура и т.н.), са еднакви в различните части на тази система.

Необратими термодинамични процеси са тези, които могат спонтанно да протичат само в една определена посока. Такива са например: процеси на дифузия, топлопроводност, термична дифузия, вискозен поток, разширяване на газ в празнина и др. Всички те са неравновесни. В природата повечето процеси са необратими, а обратимите процеси могат да протичат само в състояние на термодинамично равновесие.

В затворените системи необратимите процеси са съпроводени с нарастване на ентропията. В отворените системи (които могат да обменят енергия или материя с околната среда), при необратими процеси, ентропията може да остане постоянна или дори да намалее поради обмяна на ентропия с околната среда.

Ако параметрите на системата по време на нейното взаимодействие с околните тела не се променят с времето, тогава състоянието на системата се нарича стационарно. В различните части на система, която е в стационарно състояние, стойностите на параметрите обикновено се различават: температура в различни части на човешкото тяло, концентрация на дифузиращи молекули в различни части на биологичната мембрана и т.н. По този начин постоянните градиенти на някои параметри се поддържат в системата, при постоянна скорост могат да протичат химически реакции.

Стационарното състояние се поддържа благодарение на потоците от енергия и материя, преминаващи през системата. Ясно е, че системите, които или обменят както енергия, така и материя с околните системи (отворени системи) или само обменят енергия (затворени системи), могат да бъдат в стационарно състояние.

3.1.3 Принципи на термодинамиката

Класическата термодинамика е аксиоматична теория. Тя се базира на три основни закони (принципи) формулирани на базата на огромен брой наблюдения.

В термодинамиката законът за запазване на енергията е прието да се нарича *първи принцип на термодинамиката*. Той гласи, че количеството топлина погълнатото от една система е равно на сумата от промяната на вътрешната ѝ енергия и на извършената от нея работа:

$$\delta Q = dU + dA \quad (3.1)$$

Вътрешната енергия U е функция на състоянието на системата. Това означава, че нейната стойност не зависи от предисторията на системата. Промяната на вътрешната енергия зависи само от началното и от крайното състояние и не зависи от начина, по който се стигнало до него. От гледна точка на молекулярно кинетичната теория вътрешната енергия на тялото се състои от кинетичната енергия на транслационното и ротационното движение на молекулите, кинетичната и потенциалната енергия на вибрационното движение на атомите в молекулите и потенциалната енергия на взаимодействие между тях.

Количеството енергия, предадено от едно тяло на друго чрез пренос на топлина, се характеризира с количеството топлина Q . От това следва, че количеството топлина трябва да се измерва в същите единици (джаули в система СИ) като енергията или работата.

За разлика от вътрешната енергия, количеството топлина и работата зависят от начина, по който се е стигнало от началната до крайното състояние, т.е. те не са функции на състоянието.

Първият закон на термодинамиката не показва посоката на възможното протичане на процесите. Така например, според първия закон на термодинамиката, по време на пренос на топлина би било еднакво възможно както спонтанното прехвърляне на топлина от по-нагрятото тяло към по-малко нагрятото тяло, така и обратното, от по-малко нагрятото тяло към по-нагрятото тяло. От ежедневиия опит обаче е добре известно, че вторият процес никога не се случва в действителност.

Вторият закон на термодинамиката, подобно на първия, е обобщение на експериментални данни. Има няколко формулировки на втория закон на термодинамиката, ето две от тях:

1. Формулировката на Клаузиус - невъзможно е да се предаде топлина от по-студена система към по-гореща система без да настъпи промяна в двете системи или в околните тела.
2. Формулировката на Томсън - вечната двигател от втория род е невъзможен, тоест невъзможно е да се създаде машина, която да превръща цялата топлина в работа, без да отдава част от нея на хладилник.

Ако в реална система е извършена работа, тогава за да се върне в първоначалното си състояние, е необходимо да се въведе енергия отвън, тъй като част от първоначалната енергия необратимо се е превърнала в топлина. Тази част от вътрешната енергия на системата, която по принцип може да се използва за извършване на работа, се нарича свободна енергия. Останалата част от енергията, която не може да се преобразува в работа, се нарича свързана енергия тя се характеризира с величината *ентропия*. В класическата термодинамика тя се дефинира с като:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \quad (3.2)$$

От тази формула се вижда, че ентропията се дефинира с точност до константа. Нейното значение се уточнява във *третия закон на термодинамиката*. Във формулировката на Нернст той гласи, че когато температурата на една равновесна термодинамична система клони към нула, нейната ентропия престава да зависи от термодинамичните параметри и клони към константа, която се приема за нула. Причината за това се крие във формулата за ентропията, която се дава от статистическата физика $S = k \ln P$, стр.53 (3.8), където P е вероятността системата да се намира в това състояние. При абсолютната нула, съгласно класическата статистическа термодинамика, движението на частиците е спряло, т.е. има само едно състояние, следователно $P = 1$ и $S = 0$.

Същността на ентропията се разкрива при разглеждането ѝ в статистическата термодинамика.

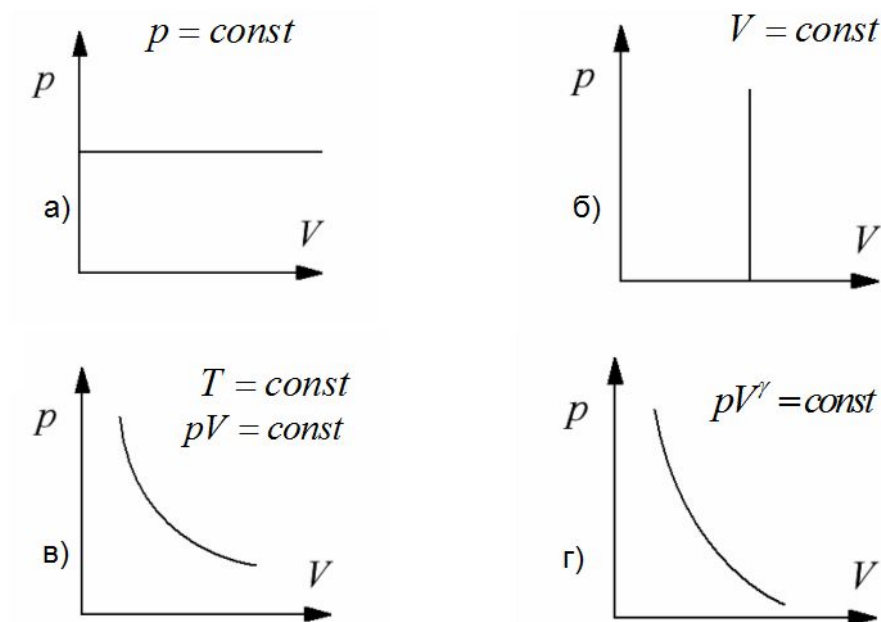
3.1.4 Закони на идеалните газове

Под идеален газ във физиката се разбира газ, чиито молекули имат пренебрежим размер и не взаимодействат помежду си от разстояние. Много реални газове

удовлетворяват с добра точност тези условия при обикновено атмосферно налягане и температура. На основата на експерименти с разреждени газове са установени редица закони, които се наричат *закони на идеалните газове*:

- ЗАКОН НА ГЕЙ-ЛЮСАК: $\frac{V}{T} = const$ при постоянно налягане – изобарен процес;
- ЗАКОН НА ШАРЛ: $\frac{p}{T} = const$ при постоянен обем – изохорен процес.
- ЗАКОН НА БОЙЛ-МАРИОТ: $pV = const$ при постоянна температура – изотермен процес;

На фигура 3.1 са показани pV диаграмите, които съответстват на тези закони (а, б, в). На г) е показана диаграмата на *адиабатния процес*, който се извършва без обмен на топлина, т.е. $\delta Q = 0$.



Фигура 3.1: pV диаграми на известни процеси: а) изобарен, б) изохорен в) изотермен, г) адиабатен.

Трите закона могат да бъдат обединени в един:

$$\frac{pV}{T} = const$$

Константата зависи от количеството на газа. В система SI единицата за количество вещество е **молът**. В 1 mol по дефиниция се съдържа толкова молекули, колкото има в 12 g ^{12}C . Този брой се нарича *число на Авогадро* N_A . В началото на 19 век Авогадро е установил, че 1 mol от различни газове при еднакви налягане и температура заемат еднакви обеми. Следователно за 1 mol, константата в горното уравнение е една и съща – тя се нарича *универсална газова константа* R . За произволен брой молекули n от идеален газ е в сила:

- ЗАКОН НА КЛАПЕЙРОН–МЕНДЕЛЕЕВ.

$$pV = nRT = \frac{m}{M}RT \quad (3.3)$$

Константата M се нарича моларна маса. От молекулно–кинетична гледна точка това е масата на молекулата на газа, изразена във въглеродни единици. Уравнението се нарича *закон за състоянието на идеалния газ*.

Реалните газове се описват с уравнението на състоянието на идеалния газ само приблизително и отклоненията стават забележими при високо налягане и ниски температури, особено когато газът е близо до кондензация. За описанието им в по-широк интервал са предложени много уравнения. Едно от най-простите, което най-много прилича на (3.3) е *уравнението на Ван-дер-Ваалс*. За един мол то има вида:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \quad (3.4)$$

Константата на Ван-дер-Ваалс се определят експериментално за всеки газ, b има смисъл на обема на молекулите в 1 mol, а членът a/V^2 отчита взаимното притегляне между молекулите.

Характерно за уравнението на Ван-дер-Ваалс е, че то описва не само газовата, но и течната фаза на веществото.

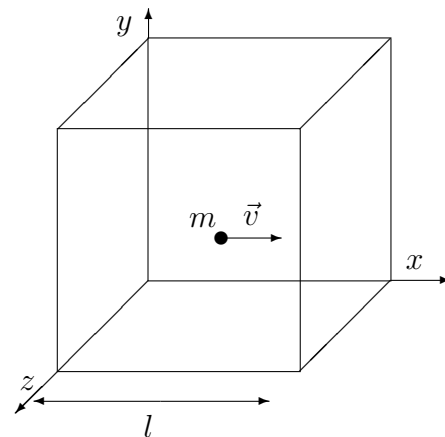
3.1.5 Основно уравнение на кинетичната теория на газовете

Ще получим уравнението за състоянието на идеалния газ, при предположение, че движението на молекулите е хаотично, всички посоки са равновероятни, молекулите не се удрят помежду си, а само в стените на съда, който ще представлява един куб със страна l – фиг.3.2. Нека броят на всички молекули е N . Разглеждаме движението на една от тях с маса m_i , и проекция на скоростта v_{ix} по оста x . Ще предположим, че удара в стената е напълно еластичен – след удара молекулата ще има същата скорост, но с обратен знак, следователно изменението на импулса $p_x = mv_{ix}$ ѝ ще бъде $\Delta p_x = 2m_{ix}$. Времето между два последователни удара на тази молекула е $\Delta t_i = \frac{2l}{v_{ix}}$.

Ако времето на удара е δt_i , то силата, с която молекулата действа на стената е:

$$f_i = \frac{2m_i v_{ix}}{\delta t_i}$$

Молекулата се движи с голяма скорост и се удря често в стената. Многото на брой действащи за малък интервал от време големи сили f_i , можем да заменим



Фигура 3.2: Движение на молекулите на идеален газ.

с една средна сила \bar{f}_i , която действа през цялото време между два удара Δt_i , докато стената действа само през време δt :

$$\bar{f}_i = f_i \frac{\delta t_i}{\Delta t_i}$$

Замествайки f_i и Δt_i получаваме:

$$\bar{f}_i = \frac{m_i v_{ix}^2}{l}$$

Ако сумираме по всички N молекули, ще получим за пълната сила действаща върху стената:

$$F = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_{ix}^2}{l}$$

Като разделим силата на площта l^2 на стената и заменим l^3 с обема V , получаваме налягането:

$$p = \frac{F}{l^2} = \frac{1}{l^3} \sum_{i=1}^N m_i v_{ix}^2 = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N m_i v_{ix}^2$$

Понеже молекулите се движат хаотично във всички направления, средните им скорости по x , y и z ще са равни и затова:

$$\sum_{i=1}^N m_i v_{ix}^2 = \sum_{i=1}^N m_i v_{iy}^2 = \sum_{i=1}^N m_i v_{iz}^2$$

Тъй като $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, то:

$$\sum_{i=1}^N m_i v_{ix}^2 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2$$

и за налягането получаваме:

$$p = \frac{2}{3V} \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{2}{3V} E_k,$$

където $E_k = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2}$ е кинетичната енергия на всички молекули на газа. Сред-

ната кинетична енергия на газа е $\bar{E}_k = \frac{E_k}{N}$ и следователно:

$$pV = \frac{2N}{3} \bar{E}_k$$

Броят на молевете е $n = \frac{N}{N_A}$

$$pV = n \frac{2N_A}{3} \bar{E}_k$$

За да съвпадне дясната страна на това уравнение с тази на уравнението на Клапейрон–Менделеев трябва:

$$\frac{2N_A}{3}\bar{E}_k = RT$$

Виждаме, че абсолютната температура на газа е свързана с средната кинетична енергия на неговите молекули.

$$\bar{E}_k = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T = \frac{3}{2} kT$$

Константата $k = \frac{R}{N_A}$ се нарича *константа на Болцман*. От това съотношение се вижда защо абсолютната температура не може да стане по-малка от нула. Уравнението за състоянието на идеалния газ може да се запише и във вида:

$$PV = NkT$$

Ако един газ се състои от смес от газове, то те ще заемат един и същи обем, температурата им ще бъде една и съща, общият брой на частиците ще бъде сума от броя на частиците на отделните компоненти, и следователно, и налягането на газа ще бъде сума от наляганята на отделните му съставлящи – това твърдение се нарича *закон на Далтон за парциалните налягания*.

3.1.6 Вътрешна енергия на идеален газ

Молекулите на идеалния газ не взаимодействат помежду си, следователно тяхната енергия е чисто кинетична. За вътрешната енергия на идеалния газ получаваме:

$$U = N\bar{E}_k = \frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2}nN_AkT = \frac{3}{2}nRT,$$

където n е означен броят на моловете. Вижда се, че вътрешната енергия на идеалния газ зависи само от температурата.

Числото 3 в горната формула е резултат от това, че газът се състои от едноатомни молекули. То съответства на 3 степени на свобода – движение по осите x , y и z . Ако молекулите на газа са многоатомни, те ще имат повече степени на свобода – постъпателно, въртливо и трептливо. В класическата статистическа физика се доказва, че енергията се разпределя равномерно по всички степени на свобода, като стойността ѝ на една степен е $1/2kT$. Знаем, че трептенията около равновесното положение ако отклоненията са малки са хармонични, а при хармоничните трептения средната кинетична енергия е равна на средната потенциална, затова на трептливото движение се приписват 2 степени на свобода. Броят на степените на свобода на една молекула е $i = \text{брой постъпателни} + \text{брой ротационни} + 2 \cdot \text{брой вибрационни степени на свобода}$. При i степени на свобода вътрешната енергия на идеалния газ е:

$$U = \frac{i}{2}nRT$$

3.2 Топлоемност

Топлоемността е величина, която се дефинира не само за газовете, а за всички видове тела. Тя е равна на количеството топлина, която приема тялото при повишаване температурата му с 1 градус.

$$C = \frac{dQ}{dT}$$

В зависимост от количеството вещество говорим за специфична топлоемност, което се нагрява 1 kg и за моларна топлоемност, ако веществото е 1 мол.

3.2.1 Топлоемност на идеалния газ

Топлоемността зависи от условията при което става нагряването. Ако то става при постоянно налягане топлоемността са бележи с C_p , а ако обемът е постоянен с C_V .

$$C_p = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_p, \quad C_V = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_V$$

Между двете величини има връзка, която се получава от първия закон на термодинамиката:

$$\delta Q = dU + pdV \quad (3.5)$$

$$C_p = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_p + p \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

$$C_V = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$$

$$C_p = C_V + p \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

Затога за моларната топлоемност при постоянен обем получаваме:

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{i}{2}R$$

Уравнението за състоянието на 1 мол идеален газ е $pV=RT$. Диференцираме по T при постоянно налягане и получаваме:

$$p \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = R$$

За моларната топлоемност при постоянно налягане получаваме:

$$C_p = C_V + p \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = C_V + R = \frac{i}{2}R + R = \frac{i+2}{2}R$$

Като разделим топлоемността на идеалния газ при постоянно налягане на топлоемността му при постоянен обем, получаваме величина, която зависи само от броя на степените на свобода:

$$\frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}$$

Молекула/ Степени на свобода	N ₂ Линейна	H ₂ O Плоска	CO ₂ Линейна	C ₂ H ₆ Плоска
Всичко	6	9	9	24
Постъпателни	3	3	3	3
Ротационни	2	3	2	3
Вибрационни	1	3	4	18
i	7	12	13	42
C_p/C_V	1,286	1,167	1,154	1,048

Таблица 3.1: Брой на степените на свобода за различни молекули.

3.3 Функция на разпределението

3.3.1 Закон на Максвел за разпределението на молекулите по скорости

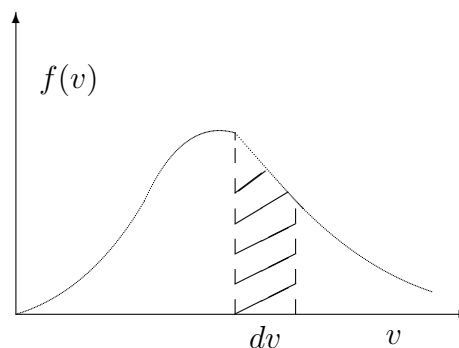
Когато имаме извънредно голям брой частици, които се движат хаотично, е невъзможно да се приложи метода от класическата динамика за описание на движението им. Тогава се използват статистически методи – основни понятия са: *вероятността* и *плътността на функцията на разпределение* на някаква величина. Величините, които се измерват се наричат *случайни величини*, понеже се получават като резултат от действието на много, различно действащи фактори. Такава величина е скоростта на всяка молекула – поради многобройните удари между молекулите, тя непрекъснато се мени по големина и посока. Вместо да следим за движението на една молекула, да преброим колко молекули dN има в интервала по скорости $(v, v + dv)$. Отношението $\frac{dN}{N}$ им към броят на всички молекули N ни дава представа за вероятността скоростта да има стойност v в този интервал.

Плътността на разпределението на големината на скоростта v се дефинира като:

$$f(v) = \frac{1}{N} \frac{dN}{dv}$$

За разлика от посоките, скоростите на молекулите не се равновероятни. При удара на една молекула движеща се с голяма скорост, тя предава част от скоростта си на по-бавната молекула. В резултат на на този процес, броят на молекулите със скорост около някакво средно значение е голям, а броят им с много малки или много големи скорости е малък.

Следователно плътността на разпределението $f(v)$ клони към нула при малки и големи v и има максимум при някаква средна скорост (фиг.3.3).



Фигура 3.3: Разпределение на Максвел на молекулите по големината на скоростта

Видът на тази функция е установен теоретично от Максвел и за това носи неговото име:

$$f(v) = \frac{1}{N} \frac{dN}{dv} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

Частта от молекулите, които имат скорости в някакъв интервал dv (фиг.3.3) е равна на площта заградена от границите на интервала и функцията на Максвел. Цялата площ, заградена от кривата и абсцисата x е единица, затова за разпределението на Максвел е в сила:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)dv = 1$$

Функциите, които имат такова свойство се наричат *нормирани*, а горния интеграл условие за нормировка.

3.3.2 Барометрична формула, разпределение на Болцман, закон на Максвел – Болцман

При извода на уравнението за състоянието на идеалния газ предположихме, че на него не му действат външни сили. На молекулите на всеки газ намиращ се на Земята действа силата на тежестта. Ако не съществуваше топлинното движение всички молекули на въздуха биха паднали върху повърхността на Земята, а ако не съществуваше земното привличане те биха отлетели в Космоса. Например, поради слабото си гравитационното поле, Луната отдавна е загубила своята атмосфера. В резултат на топлинното движение на всяко ниво в атмосферата се установява равновесие – колкото молекули го преминават в посока нагоре, толкова се спускат надолу, а налягането става функция на височината. Да предположим, че цялата атмосфера има постоянна температура T , и че състоянието на въздуха се описва от уравнението на Клапейрон–Менделеев:

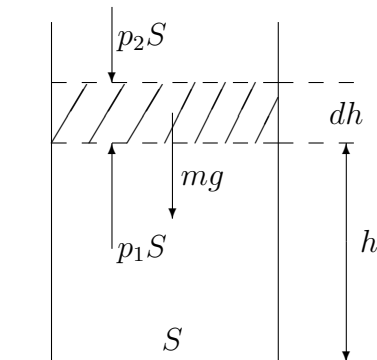
$$p = \frac{m}{V} \frac{1}{M} RT = \frac{\rho}{M} RT,$$

където ρ е плътността на въздуха.

Разглеждаме един слой въздух намиращ се на височина h над земната повърхност, имащ напречно сечение със площ S и дебелина dh – защрихованата площ на фиг.3.4. Силата на тежестта, действаща на този слой $mg = \rho Vg = \rho Shg$, се компенсира от разликата на силите на налягането отдолу и отгоре $(p_1 - p_2)S = -dpS$, затова:

$$dpS = -\rho Sgh$$

Заменяйки ρ от уравнението за състоянието получаваме:



Фигура 3.4: Извод на барометричната формула.

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT}dh$$

Интегрирайки по h от нула, а по p от стойността на налягането на нулева височина p_0 получаваме *барометричната формула*:

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} \int_0^h dh, \quad \ln p - \ln p_0 = -\frac{Mg}{RT}h$$

$$p = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}$$

От уравнението за състоянието следва, че концентрацията на газа n е пропорционална на налягането, затова за нея можем да напишем:

$$n = n_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}},$$

където n_0 е концентрацията близо до земната повърхност. Като заместим R с $N_A k$ и използваме, че масата на една молекула е свързана с моларната ѝ маса $m = \frac{M}{N_A}$ получаваме:

$$n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}$$

Величината mgh е потенциалната енергия на една молекула E_p , следователно можем да запишем:

$$n = n_0 e^{-\frac{E_p}{kT}}$$

В този вид уравнението е вярно за идеален газ, намиращ се в полето на произволна сила с потенциална енергия E_p . Разпределението на молекулите в пространството, където действа потенциална сила се нарича *Болцманово разпределение*. Двете разпределение, Максвеловото и Болцманово могат да се обединят в едно:

$$\frac{dN}{N} = A e^{-\frac{E_k + E_p}{kT}} dx dy dz dv_x dv_y dv_z$$

Разпределението на Максвел–Болцман дава броя молекули, намиращи се в обем $dx dy dz$ около точката (x, y, z) и имащи скорост с компоненти в интервала $dv_x dv_y dv_z$. Константата A се намира от условието за нормировка.

3.4 Статистическа природа на ентропията

В първия закон на термодинамиката:

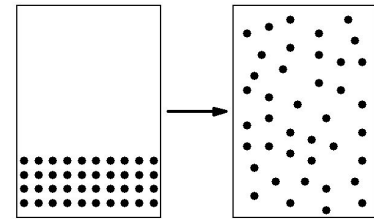
$$\delta Q = dU + pdV \tag{3.6}$$

количеството топлина не случайно е отбелязано с δ , а не със знака за диференциал d . Q не е функция на състоянието както U , т.е. тя не зависи само от началното и крайното състояние, а и от пътя между тях, затова не може да се запише като пълен диференциал. Оказва се, обаче, че частното $\frac{\delta Q}{T}$ е пълен диференциал. Тази величина се нарича ентропия:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \quad (3.7)$$

Твърдението, че ентропията е функция на състоянието е математическата формулировка на *втория закон на термодинамиката*, чиято по-популярна формулировка е, че не може да се получи работа в резултат само на охлаждането на резервоар. *Първият закон на термодинамиката* е изразен в уравнение (3.6). Ентропията на една затворена система може само да се увеличава или да остава постоянна.

Ентропията също като енергията е едно от най-важните понятия във физиката. Смесът на ентропията се разкрива при разглеждане на строежа на веществото. Всяка термодинамична система се състои от микроскопични частици, които се намират в непрекъснато движение, взаимодействайки помежду си и със стените на съда, в който са затворени. Системата може да се намира в най-различни състояния, например молекулите на един съд пълен с идеален газ могат да се намират събрани само в една част от съда, но вероятностите за реализирането им е различна.



Фигура 3.5: Нарастване на ентропията в затворена система.

В нашия пример много по-вероятно е частиците да са разпределени равномерно по целия обем (фиг. 3.5). Ентропията е именно мярка за тази вероятност. Уравнението, което дава връзката между вероятността P една *термодинамична система* да се намира в някакво състояние и ентропията S е получено от Болцман:

$$S = k \ln P, \quad (3.8)$$

където k е константата на Болцман. Това уравнение разкрива и причината, поради която системата се стреми да достигне състояние с максимална ентропия – това е най-вероятното ѝ състояние.

Да се върнем към нашия пример. Нека да разбием обема V на газа на елементарни обеми V_0 , в един такъв обем може да се помести само една молекула. Целият обем е разделен на V/V_0 части, следователно една молекула може да се разположи по $\frac{V}{V_0}$ начина, и броят на възможните разположения е $(V/V_0)^N$. При промяна на обема на газа от V_1 до V_2 , вероятностите се променят от P_1 до P_2 , които се отнасят както:

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^N$$

и следователно изменението на ентропията ще бъде:

$$S_2 - S_1 = k \ln P_2 - k \ln P_1 = k \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^N = kN(\ln V_2 - \ln V_1)$$

$$dS = Nk d \ln V$$

До същата формула се стига ако приложим първият закон на термодинамиката $\delta Q = dU + pdV$ към изотермичното свиване на идеален газ. При този процес $dU = 0$, тъй като вътрешната му енергия не се изменя (тя зависи само от температурата), затова:

$$pdV = \delta Q = TdS$$

От друга страна от уравнението за състоянието на идеалния газ $pV = NkT$ получаваме:

$$dA = pdV = d(pV) - Vdp = d(NkT) - Vdp$$

Понеже $NkT = const$ и $p = \frac{NkT}{V}$ то $dA = NkT \frac{dV}{V}$ и за ентропията получаваме:

$$TdS = NkT \frac{dV}{V} \quad , \quad dS = Nk d \ln V$$

т.е. стигаме до същия израз получен от формулата на Болцман.

3.5 Явления на пренасяне

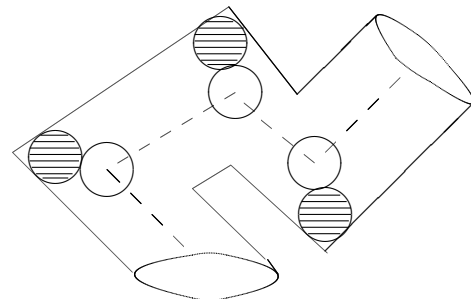
Намиращите се в равновесие газове имат еднакви свойства във всички точки на съда, в който се намират. Ако възникне отклонение от равновесното положение то в газът ще възникне насочено движение на молекулите, довеждащо до възстановяване на равновесието. Явленията свързани с установяването на равновесието в този случай се наричат *явления на пренос*.

Статистическата физика се занимава с равновесното положение на системите, частта от физиката, която се занимава с процесите възникващи при отклонение от равновесието се нарича *физическа кинетика*.

3.5.1 Среден свободен пробег

Молекулите на газовете, намирайки се в непрекъснато движение, променят направлението си на движение в резултат от удари в стените на съда или взаимодействие помежду си.

Ако си ги представим като малки твърди топчета с диаметър d то две молекули ще се ударят когато центровете им се доближат на разстояние d (фиг.3.6). Разбира се реалните молекули не са твърди топчета, но могат да бъдат характеризирани с величината *ефективно сечение* σ . Ако означим диаметъра на всяка молекула с d то $\sigma = \pi d^2$. Разстоянието, което изминава една молекула между два удара се нарича свободен пробег.



Фигура 3.6: Среден свободен пробег.

Понеже ударите между молекулите са случайни, свободният пробег също се мени от удар към удар и има смисъл да се въведе понятието *среден свободен*

пробег. λ Тази величина очевидно е свързана с размера на молекулите – ако те са по-малки ще бъде по-трудно да се удрят и λ ще бъде по-голям.

Да разгледаме движението на една молекула. За една секунда тя, движеща се със средна скорост \bar{v} , ще измине път \bar{v} . Ако опишем около нея цилиндър с радиус d , тя ще срещне по пътя си $\pi d^2 \bar{v} n_{\text{отн}}$ други молекули (фиг.3.6), където n сме означили броят на молекулите в единица обем, а с $\bar{v}_{\text{отн}}$ средната относителна скорост между молекулите. Като разделим изминатия път на броят на ударите ще получим средният свободен пробег:

$$\lambda = \frac{\bar{v}}{\bar{v}_{\text{отн}} \pi d^2 n}$$

Отношението $\bar{v}/\bar{v}_{\text{отн}}$ може да бъде пресметнато като осредним разликата между скоростта на две молекули:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{\text{отн}} &= \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \\ v_{\text{отн}}^2 &= (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \theta_{12} \end{aligned}$$

Ъгълът между две молекули има случайна стойност, затова $\overline{\cos \theta_{12}} = 0$, а $\overline{v_1^2} = \overline{v_2^2} = \bar{v}^2$, което води до:

$$\bar{v}_{\text{отн}}^2 = 2\bar{v}^2 \text{ и следователно } \bar{v}/\bar{v}_{\text{отн}} = 1/\sqrt{2}$$

За средния свободен пробег получаваме:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \sigma n} \tag{3.9}$$

Ефективното сечение на газовете не е постоянно, то се намалява с увеличаването на температурата. Да приемем, че размерът на една молекула е 1\AA . При нормални условия 1 mol газ, в който има $6.06 \cdot 10^{23}$ молекули, заема обем 22.4 l , затова плътността на газа е $n = \frac{6.06 \cdot 10^{23}}{22.4 \cdot 10^{-3}} = 6.68 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$. Замествайки във формула (3.9), получаваме $\lambda \approx 2 \cdot 10^{-7} \text{ m}$.

3.5.2 Вискозитет на газовете

Опитът показва, че в газов поток, скоростта на който се мени в някакво направление, възниква сила на триене между границите на отделните му слоеве. Тя се дава от закона на Нютон:

$$F = \eta S \frac{dv}{dz} \tag{3.10}$$

където v е скоростта, перпендикулярна на оста z . Параметърът η се нарича *динамичен вискозитет* или накратко *вискозитет*. Това е феноменологична величина, въведена да характеризира триенето между пластове. Нейният произход се изяснява като разгледаме по-детайлно механизма на пренос на импулс между пластове. Да означим броят на молекулите в единица обем n . Тази плътност е свързана с масовата плътност ρ , дефинирана като масата в единица обем $\rho = M/V$. Ако масата на една молекула е m , N молекули тежат mN и заемат обем V , така че:

$$\rho = \frac{mN}{V} = m \frac{N}{V} = mn \tag{3.11}$$

Молекулите се движат хаотично във всички направления, средно $1/3$ от тях се движат по оста x , $1/3$ по оста y и $1/3$ по z . От тези, които се движат по оста x $1/2$ се движат в положителна и $1/2$ в отрицателна посока. През една повърхност с площ S , разположена перпендикулярно на оста x за време Δt ще достигнат молекулите намиращи на разстояние $\bar{v}\Delta t$, където \bar{v} е средната им скорост.

До площадката S могат да достигнат молекулите намиращи се в обем $\bar{v}\Delta t S$. Като вземем пред вид, че само $1/6$ от тях се движат в посока на площадката, то за броят на молекулите преминаващи за време Δt ще бъде:

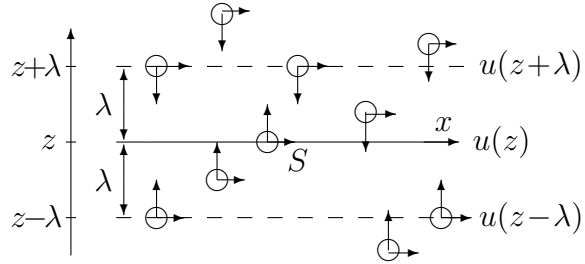
$$\Delta N = \frac{1}{6}\bar{v}\Delta t S n \quad ,$$

следователно броят на молекулите, пресичащи за единица време площ S е:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1}{6}\bar{v}nS \quad (3.12)$$

Освен, че се движат хаотично със скорост \bar{v} молекулите на газа извършват насочено движение по оста x със скорост $u(z)$. Тази скорост се нарича *дрейфова скорост*, и тя се явява средна скорост на молекулите по оста x .

Да предположим, че молекулите от горния слой имат средна скорост на насочено движение по оста x u_1 , а молекулите от долния слой u_2 . Те имат различни импулси и при удар на две молекули те ще обменят импулс. За единица време импулса на горния слой ще се промени с:



Фигура 3.7: Пренос на импулс между слоевете в газове.

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{6}\bar{v}nS(mu_2 - mu_1) = \frac{1}{6}\bar{v}nmS(u_2 - u_1)$$

За да се сблъснат всички молекули дебелината на всеки слой трябва да бъде λ . Дрейфовата скорост се изменя плавно по оста z , затова можем да запишем:

$$u_1 = u(z + \lambda) = u(z) + \frac{du}{dz}\lambda$$

$$u_2 = u(z - \lambda) = u(z) - \frac{du}{dz}\lambda$$

$$u_2 - u_1 = -2\lambda\frac{du}{dz},$$

като отчитайки, че λ е малка сме пренебрегнали членовете от втори и по-висок порядък. Изменението на импулса на слоя за единица време това е силата, която му действа, следователно:

$$F = -\frac{1}{3}\bar{v}nm\lambda S\frac{du}{dz}$$

Като вземем пред вид, че $nm = \rho$ (формула 3.11) за силата на триене между пластове получаваме:

$$F = -\frac{1}{3}\rho\bar{v}\lambda S\frac{du}{dz}$$

Ако градиентът на скоростта du/dz е положителен знакът минус показва, че силата е насочена в обратна посока на оста x . Сравнението със законът на Нютон за вътрешно триене във флуид (3.10) показва, че вискозитетът на газа е:

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \lambda \quad (3.13)$$

Формула (3.9) показва, че произведението $\rho \lambda \sim m/\sigma$, но $\bar{v} \sim \sqrt{T/m}$, затова:

$$\eta \sim \frac{\sqrt{mT}}{\sigma},$$

следователно вискозитетът на газовете расте температурата – резултат различен при течностите, чийто вискозитет намалява с увеличаване на температурата.

3.5.3 Теплопроводност

Ако едно тяло се нагрее неравномерно, възниква процес на изравняване на температурата, при което се предава топлина от по-топлите към по-студените му части. Количеството топлина q , предавано за единица време през единица площ на тяло нагрято неравномерно по оста z се дава със *закона на Фурие*:

$$q = -\kappa \frac{dT}{dz} \quad (3.14)$$

Величината κ , която характеризира разпространението на топлината се нарича *коэффициент на теплопроводност*.

Този закон може да бъде получен по същия начин както законът на Нютон за вискозитета, като вземем пред вид, че в този случай вместо импулс се предава енергия. Нека да означим с T_1 температурата на горния слой на фиг.3.7, а с T_2 температурата на долния слой. Средното количество енергия, която пренася една молекула е $\frac{i}{2}kT$, затова като използваме формула (3.12) получаваме:

$$q = \frac{1}{6} \bar{v} n S \left(\frac{i}{2} k T_2 - \frac{i}{2} k T_1 \right) \quad (3.15)$$

Моларният топлинен капацитет е $c_V = \frac{i}{2} R$ и като го разделим на относителното молекулно тегло на газа M ще получим специфичната топлоемност:

$$C_V = \frac{iR}{2M} = \frac{ik}{2m},$$

където m е масата на молекулата. Можем да изразим величината $\frac{i}{2}k$ чрез специфичната топлоемност:

$$\frac{ik}{2} = C_V m,$$

замествайки в уравнението (3.15) и вземайки пред вид, че:

$$T_1 = T(z + \lambda) = T(z) + \frac{dT}{dz} \lambda$$

$$T_2 = T(z - \lambda) = T(z) - \frac{dT}{dz} \lambda$$

$$T_2 - T_1 = -2\lambda \frac{dT}{dz},$$

получаваме:

$$q = -\frac{1}{3} \rho \bar{v} C_V \lambda \frac{dT}{dz}$$

За коефициента на топлопроводност на газа получаваме:

$$\kappa = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \lambda C_V \quad (3.16)$$

Сравнявайки с (3.13) виждаме, че между коефициента на топлопроводност и вискозитета на един газ има връзка:

$$\kappa = \eta C_V$$

3.5.4 Дифузия

Друго явление на пренасяне възниква в случая, когато газът е разпределен неравномерно в обема, който заема. Нека да предположим, че плътността на газа се мени по оста z . Да означим броят на молекулите в единица обем в горния слой (фиг.3.7) с n_1 , а в долния с n_2 . Съгласно (3.12) броят на молекулите преминаващи за единица време в посока z е:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1}{6} \bar{v} (n_2 - n_1) S$$

Използвайки същото приближение за разликата $n_2 - n_1$ получаваме:

$$n_2 - n_1 = -2\lambda \frac{dn}{dz},$$

и затова

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -\frac{1}{3} \bar{v} \frac{dn}{dz} S$$

Умножаваме по масата на една молекула и като вземем пред вид, че Nm е масата на газа, а $nm = \rho$, за количеството вещество преминаващо за единица време през единица площ получаваме *закона на Фик*:

$$\frac{\Delta M}{S \Delta t} = -\frac{1}{3} \bar{v} \lambda \frac{d\rho}{dz}$$

Коефициента

$$D = \frac{1}{3} \bar{v} \lambda \quad (3.17)$$

се нарича *коефициент на самодифузия* на газа. Сравнявайки с (3.13) виждаме, че има връзка между коефициента на самодифузия и вискозитета:

$$\eta = \rho D$$

В случая, когато имаме повече от един газ, то коефициента на дифузия ще зависи от масите и свободните пробези на газовете.

Глава 4

Флуиди

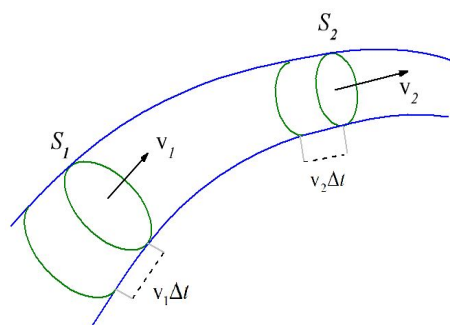
Еластичните непрекъснати среди, които разгледахме са неподвижни като цяло – точките им трептят около равновесните си положение, вседствие на което в средата се разпространяват вълни. Ще разгледаме сега движението на непрекъснатата среда, която се движи като цяло – точките ѝ могат да се преместват далеч от първоначалното си положение. Такава среда се нарича *флуид*. Това понятие отново е модел на реално съществуващи тела – течностите, а и газовете могат да бъдат разглеждани като флуиди. Делът от физиката изучаващ движението на течностите се нарича *хидродинамика*, а този изучаващ движението на газове *аеродинамика*

4.1 Движение на флуид

Движението на флуида може да бъде описано по два начина. Първият е да проследим движението на всяка точка, т.е. да зададем закона за движение $\vec{r}(\vec{r}_0, t)$, където \vec{r}_0 е началното положение на точката. Такова описание се нарича Лагранжево. Другият начин, носещ името на Ойлер, е да не следим всяка точка от флуида, а да определим скоростта на флуида $\vec{v}(\vec{r}, t)$ във всяка точка на пространството \vec{r} и във всеки момент от време t . Такава функция, която е дефинирана във всяка точка на пространството и времето се нарича *поле*.

4.1.1 Уравнение за непрекъснатост на струята

Ако знаем полето $\vec{v}(\vec{r}, t)$ в течност можем да прекараме линии така, че те да са допирателни във всяка своя точка до вектора \vec{v} . Така получените криви се наричат *токови линии*. Когато скоростта във всяка точка на пространството остава постоянна течението на течността се нарича *стационарно*. Като вземем пред вид, че скоростта на една точка е винаги допирателна до нейната траектория става ясно, че всъщност токовете линии представляват траекториите на частиците.



Фигура 4.1: Токова тръба.

На фигура 4.1 е показана токова тръба с два разреза, перпендикулярно на посоката на скоростта със площи съответно S_1 и S_2 . Да приемем, че скоростта на частиците е една и съща във всички точки на един разрез. За време dt всички частици ще преминат през първия разрез на разстояние $v_1 dt$, следователно обемът

течност, който ще протече е $S_1 v_1 dt$, а за същото време през втория разрез ще премине обем $S_2 v_2 dt$. Ако течността е несвиваема то двата обема са равни:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 = \text{const}$$

Полученият резултат се нарича *уравнение за непрекъснатост на струята*.

4.1.2 Уравнение на Бернули

Частичите, съставлящи един флуид, могат да се движат свободно във всички посоки, затова силите, с които те действат са перпендикулярни на всяка повърхност. Също както при газовете се въвежда величината налягане p , като силата създадена от налягането е перпендикулярна на повърхността върху, която то действа $F = pS$.

Под действието на силите на налягането течността се придвижва по токовата тръба, както е показано на фиг.4.2. Обемът течност $\Delta l_1 S_1$, който се намира в горния край, се премества под действието на силата $p_1 S_1$, която извършва работа $p_1 S_1 \Delta l_1$. От долния край действа налягане p_2 , което извършва работа $p_2 S_2 \Delta l_2$. Промяната на кинетичната енергия на течността в тръбата е:

$$\Delta E_k = \rho S_2 \Delta l_2 \frac{v_2^2}{2} - \rho S_1 \Delta l_1 \frac{v_1^2}{2},$$

а промяната на потенциалната енергия е:

$$\Delta E_p = \rho S_2 \Delta l_2 g h_2 - \rho S_1 \Delta l_1 g h_1$$

Приели сме, че флуидът е несвиваем, затова плътността ρ е една и съща в двата края и обемите $S_1 \Delta l_1$ и $S_2 \Delta l_2$ са равни. Ергията се променя поради извършената работа:

$$A = \Delta E_k + \Delta E_p,$$

получаваме:

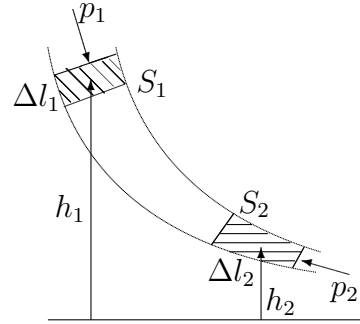
$$p_2 S_2 \Delta l_2 - p_1 S_1 \Delta l_1 = \rho S_2 \Delta l_2 \frac{v_2^2}{2} - \rho S_1 \Delta l_1 \frac{v_1^2}{2} + \rho S_2 \Delta l_2 g h_2 - \rho S_1 \Delta l_1 g h_1$$

Разделяме на обема $S_1 \Delta l_1 = S_2 \Delta l_2$ и получаваме, че:

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{v_1^2}{2} = p_2 + \rho g h_2 + \frac{v_2^2}{2}$$

Вижда се, че величината $p + \rho g h + \frac{v^2}{2}$ остава постоянна по токовата линия.

Уравнението се нарича *уравнение на Бернули*. То е изпълнено за идеален флуид, но важи доста добре за реални флуиди, в които вътрешното триене не е много голямо.



Фигура 4.2: Извод на уравнението на Бернули.

4.1.3 Реални флуиди

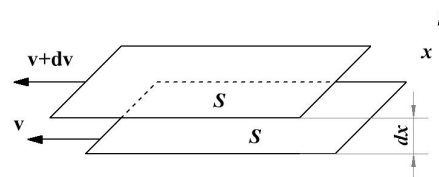
Изчисленията показват, че в идеална течност равномерното движение на телата трябва да се извършва без съпротивление. Без вискозитет идеалната течност трябва да се плъзга свободно по повърхността на тялото, като напълно тече около него.

В реална течност силите на взаимно привличане действат между молекулите, причинявайки вътрешно триене. Вътрешното триене, например, причинява сила на съпротивление при разбъркване на течност и забавя скоростта на падане на хвърлените в нея тела.

Има два вида течен (или газов) поток. В някои случаи течността изглежда разделена на слоеве, които се плъзгат един спрямо друг, без да се смесват. Такова течение се нарича *ламинарно* (слоесто). Ако в ламинарен поток се въведе оцветител, той остава, без да се измива, по цялата дължина на потока, тъй като частиците в ламинарен поток не преминават от един слой в друг. Ламинарният поток е стационарен. При бавно движение можем да го представим като движение на слоеве, които се плъзгат един спрямо друг.

Нютон установява, че силата F на вътрешно триене между два слоя течност, движещи се с различни скорости, зависи от естеството на течността и е право пропорционална на площта на S на слоя и градиента на скоростта $\frac{dv}{dx}$ между тях:

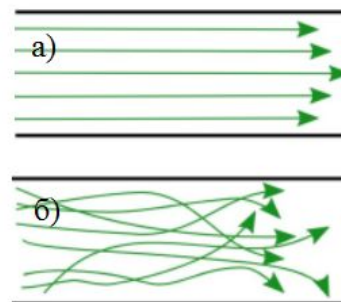
$$F = \eta S \frac{dv}{dx}$$



Фигура 4.3: Триене в ламинарно течение.

Това е *уравнението на Нютон*. Тук η е коефициентът на пропорционалност, наречен коефициент на вътрешно триене или динамичен вискозитет (или просто *вискозитет*). Вискозитетът зависи от състоянието и молекулните свойства на течността (или газа). За много течности вискозитетът не зависи от градиента на скоростта, такива течности се наричат нютонови.

Явленията възникват по различен начин, когато тялото се движи през течност с вискозитет. В този случай много тънък слой течност се прилепва към повърхността на тялото и се движи с него като цяло, увеличавайки следващите слоеве със себе си поради триене. С отдалечаване от повърхността на тялото, скоростта на слоевете става все по-малка и накрая, на известно разстояние от повърхността, течността се оказва практически необезпокоявана от движението на тялото. Така тялото е заобиколено от слой течност, в който има градиент на скоростта.



Фигура 4.4: Ламинарно а) и турбулентно б) течение.

Този слой се нарича *граничен*. В него действат сили на триене, които в крайна сметка се оказват приложени към тялото и водят до появата на съпротивление. Наличието на граничен слой фундаментално променя характера на флуидния поток около тялото. Пълният поток става невъзможен. Действието на силите на

триене в повърхностния слой води до факта, че потокът се отделя от повърхността на тялото, в резултат на което зад тялото се появяват вихри (фиг. 4.4).

С увеличаване на скоростта или напречните размери на потока, характерът на потока се променя значително. Получава се енергично смесване на течността. Такъв поток се нарича *турбулентен*. В турбулентен поток скоростта на частиците на всяко дадено място се променя през цялото време по хаотичен начин - потокът е нестабилен. Ако цветен поток се въведе в турбулентен поток, тогава вече на малко разстояние от мястото на въвеждането му цветната течност се разпределя равномерно по цялото напречно сечение на потока.

С увеличаване на скоростта на потока на вискозна течност през тръба, поради нехомогенността на налягането в напречното ѝ сечение се създава турбулентност. В турбулентен поток скоростта на частиците на всяко място се променя непрекъснато и хаотично, движението е нестабилно. Характерът на потока на течността през тръбата зависи от свойствата на течността, нейния дебит, размерите на тръбата и се определя от *числото на Рейнолдс*:

$$Re = \frac{\rho v d}{\eta}$$

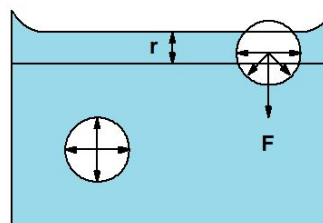
където ρ е плътността на течността, d е диаметърът на тръбата, а v е средната скорост на потока за сечението на тръбата. Ако числото на Рейнолдс е по-голямо от определена критична стойност, движението на течността е турбулентно. Например за гладки цилиндрични тръби при $Re < 2000$ течението е ламинарно. При стойности на Re над критичната стойност и до определена граница се наблюдава преходен (смесен) режим на флуиден поток, когато е по-вероятно турбулентно течение, но в някои специфични случаи се наблюдава и ламинарен поток, т.нар. нестабилна турбуленция. За кръгли тръби преходният режим съответства на диапазона на числата на Рейнолдс от 2300 — 10000.

4.2 Повърхностно напрежение

При контакт между две среди молекулите им си взаимодействат през разделящата ги повърхност, като само тези молекули, които се намират непосредствено на самата повърхност вземат участие в повърхностните явления. Повърхностните явления обикновено не играят голяма роля когато телата са големи, тъй като броят на тези молекули е много малък в сравнение с броя на молекулите в целия обем. Те обаче стават значими за тела с малки размери.

Междумолекулните сили в течността бързо намаляват и могат да се пренебрегнат на разстояние r , наречено радиус на молекулно действие, а сферата с радиус r се нарича сфера на молекулно действие.

На всяка молекула във вътрешността на течността на разстояние от повърхността $d > r$ действат всички молекули, намиращи се в сферата на молекулно действие, и действието им се уравновесява, т. е. резултантната сила $F = 0$. За молекула на разстояние от повърхността $d < r$ равнодействащата сила е отлична от нула и насочена перпендикулярно на повърхността към вътрешността на течността. Това обуславя т. н. *кохезионно налягане*.



Фигура 4.5: Произход на повърхностното напрежение.

При преминаване на молекула от вътрешността в повърхностния слой се извършва работа срещу кохезионното налягане (фиг.4.5) и се увеличава потенциалната енергия. Следователно, повърхностният слой на течността с площ S притежава допълнителна енергия U , наречена повърхностна енергия. Очевидно повърхностната енергия е пропорционална на площта S на повърхността на разделяне:

$$U = \alpha S$$

Константата α , която характеризира енергията на единица площ се нарича *коэффициент на повърхностно напрежение*, в система СИ се измерва в единици J/m^2 .

Както знаем от механиката, при състояние на устойчиво равновесие тялото има най-ниска енергия. Следователно, повърхностната енергия ще се стреми да приеме възможно най-малката стойност. Оттук следва, че повърхността между две среди винаги се стреми да намалява. Именно с това е свързан стремежът на капчиците течност (или газовите мехурчета) да придобиват сферична форма – за даден обем сферата има най-малката повърхност от всички тела. На тази тенденция се противопоставя гравитацията, но за малките капчици това влияние е слабо и тяхната форма е близка до сферичната. В условията на безтегловност формата на всяка свободна маса течност ще бъде сферична.

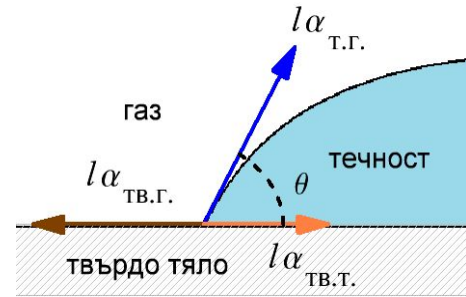
Силата, която възниква при опит да се промени повърхността на течността се нарича *повърхностно напрежение*. Тя може да се измери по следния начин. Нека си представим течен филм, опънат върху телена рамка, на която една от страните с дължина l може да се движи. Поради стремежа на повърхността да намалява, върху подвижната страна ще действа сила, която може да бъде измерена като се уравновеси със сила противоположна по посока и със същата големина. Съгласно

формулата за връзката между сила и потенциална енергия (в случая повърхностната енергия) то:

$$F = -\frac{dU}{dx} = -\alpha \frac{dS}{dx} = -\alpha \frac{dlx}{dx} = -\alpha l$$

Знакът минус показва, че силата на повърхностното напрежение е насочена навътре към повърхността, като силата на повърхностно напрежение F , действа на всяка единица дължина, допирателно към повърхността на течността и перпендикулярно на тази дължина.

Ако три вещества граничещи едно с друго едновременно: твърдо, течно и газообразно (фиг. 4.6), се намират в равновесие то сумата всички сили на повърхностно напрежение, приложени към елемент с дължина l от границата между тях, трябва да е нула. Условието за равновесие по посока на твърдата повърхност е:



Фигура 4.6: Равновесие на течност върху твърда повърхност.

$$l\alpha_{тв.г.} = l\alpha_{тв.т.} + l\alpha_{т.г.} \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{\alpha_{тв.г.} - \alpha_{тв.т.}}{\alpha_{т.г.}}$$

Ъгълът θ , измерен между повърхността на твърдото тяло и повърхността на течността, се нарича *контактен ъгъл*.

Наличието на контактен ъгъл води до изкривяване на повърхността на течността. Ако пресметнатият по горната формула ъгъл θ е остър ($0 < \cos \theta < 1$) течността мокри повърхността (както на фиг. 4.6), ако ъгълът е тъп ($-1 < \cos \theta < 0$), а ако $|\cos \theta| > 1$ то течността се разстила по повърхността.

Глава 5

Електричество и магнетизъм

5.1 Електростатика

Законите на електричеството и магнетизма могат да бъдат представени в изключително компактна форма наречена: уравнения на Максвел. Те могат да се запишат в диференциална и интегрална форма:

$$\begin{array}{ll} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \oiint \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{q}{\varepsilon_0} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 & \oiint \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \frac{1}{c^2} \frac{d\Phi_E}{dt} \end{array}$$

Потоците на интензитета на електричното и интензитета на магнитното поле са:

$$\Phi_E = \iint \vec{E} \cdot \vec{n} dS, \quad \Phi_B = \iint \vec{B} \cdot \vec{n} dS.$$

Към тези уравнения трябва да добавим само законът за силата $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$, с която електричното и магнитно поле действат на заряда и пред нас ще са уравненията, от които следват всички закони на електричеството и магнетизма.

5.1.1 Електричен заряд, закон на Кулон

Източник на електричното поле са зарядите, а на магнитното поле – движещите се заряди. Понятието за заряд не може да бъде изведено от други понятия, аналогично на масата, зарядът се характеризира чрез своите проявления. Той може да бъде положителен и отрицателен и наблюдаваният заряд взема само стойности кратни на заряда на електрона e , наричан елементарен заряд. Според квантовата хромодинамика съществуват заряди $\pm \frac{1}{3}e$ и $\pm \frac{2}{3}e$, които експериментално не са наблюдавани и има теоретични съображения, че не могат да съществуват в свободно състояние. Според **закона за запазване на заряда сумарния заряд на една затворена система се запазва**. Зарядът е релативистки инвариантен и остава един и същи във всяка отправна система.

Силата между два неподвижни електрически заряда във вакуум се дава от закона на Кулон:

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad (5.1)$$

Силата \vec{F}_{12} е по направлението \vec{e}_r на съединяващата зарядите права, а посоката ѝ се определя от знака на зарядите: еднаквите по знак заряди се привличат, а противоположните се отблъскват. Константата ϵ_0 в знаменателя се определя от изборът на мерните единици и се нарича диелектрична проницаемост на вакуума. В система SI основна единица е тока, който се мери в ампери, а зарядът се определя като електрическият ток протекъл за 1 секунда, измерван в кулони.

5.1.2 Интензитет на електрично поле, теорема на Гаус

През 19 век се е смятало, че взаимодействието между два заряда се предава през особена среда *етер*. Както видяхме в теорията на относителността такава среда не може да бъде наблюдавана по никакъв начин и затова това описание е изоставено. Физическата същност на електромагнитното поле се изяснява в квантовата теория на полето.

Силата, с която един заряд Q , поставен в центъра на координатната система действа на заряд q , наречен *пробен* е:

$$\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}$$

Отношението:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}$$

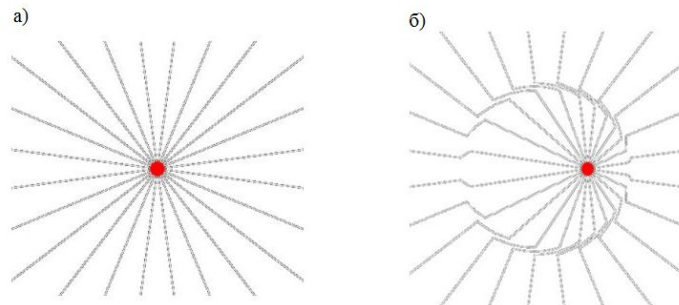
зависещо само от заряда Q се нарича *интензитет на електричното поле*.

В главата за вълни, въведохме понятието **поле**, което представлява математическа функция дефинирана във всяка точка на пространството и времето. Величината \vec{E} е именно такава и понеже не зависи от времето се нарича *електростатично поле*.

Ако имаме не един, а няколко заряда, силата, с която те действат върху пробния заряд е:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i, \quad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \sum_i \frac{\vec{F}_i}{q} = \sum_i \vec{E}_i$$

Следователно принципът на суперпозицията е приложим за електричното поле.



Фигура 5.1: Електрични силови линии на а) неподвижен и б) подвижен заряд.

Понятието за поле се въвежда за да се раздели зарядите от тяхното взаимодействие. Представете си, че имаме два неподвижни заряда. Те си взаимодействат чрез закона на Кулон. Нека сега единият заряд да започне да се движи. Ако закона на

Кулон беше в сила за подвижни заряди, то другия заряд би „почувствал“ преместването в същият момент, но съгласно теорията на относителността е необходимо време за да може сигналът да стигне до него. В този случай взаимодействието ($F = qE$), задавано от електричното поле в този момент остава същото и ще се промени чак като се промени електричното поле (фиг. 5.1).

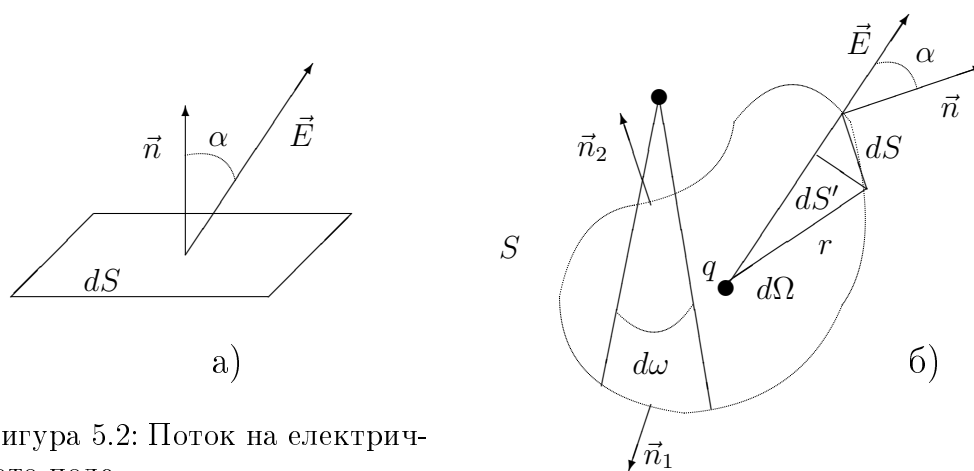
В описанието на векторните полета, каквото е електричното, се използва понятието *поток*. Ако означим с \vec{n} единичния вектор перпендикулярен на една плоска повърхност с площ dS , върху която \vec{E} е постоянен, *потокът* на интензитета на електричното поле се дефинира като скаларното произведение $d\Phi = \vec{E} \cdot \vec{n}dS = EdS \cos \alpha$ (фиг.5.1.2а). В случая, когато полето не е еднородно и повърхността не е плоска, тя се разбива на малки площадки, върху които \vec{E} може да се счита за константа, тогава потокът през цялата повърхност е сума от потоците през отделните площадки. Получената сума се нарича повърхностен интеграл в граничния случай, когато оставим площта dS да клони към нула и потокът е:

$$\Phi = \iint \vec{E} \cdot \vec{n}dS \tag{5.2}$$

В случая, когато повърхността е затворена, между потока и заряда затворен вътре, съществува съотношение наречено *теорема на Гаус*:

$$\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{5.3}$$

Потокът на интензитета на електричното поле през произволна затворена повърхност е равен на заряда затворен вътре разделен на ϵ_0 . При затворена повърхност посоката на нормалата \vec{n} **винаги** се избира отвътре навън.



Фигура 5.2: Поток на електричното поле

Ще докажем теоремата на Гаус за случая на точков заряд q заобиколен от произволна затворена повърхност S . Нека да вземем една малка площ dS от повърхността на разстояние r , която има нормала \vec{n} както е показано на фиг.5.1.2 б). Да означим с α ъгъла между нормалата и полето и да опишем сфера с радиус r . Телесният ъгъл $d\Omega$, определен от площта dS , отсича от сферата площадка

dS' . Нормалата ѝ е насочена по радиус-вектора и следователно по посока на \vec{E} и затова ъгълът между dS' и dS е α и $dS' = dS \cos \alpha$. За потока получаваме:

$$d\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dS \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dS' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS'}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega,$$

като сме използвали, че $\frac{dS'}{r^2} = d\Omega$. Като интегрираме, за пълния поток през цялата повърхност получаваме:

$$\Phi = \oiint d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{4\pi} d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Ако вътре в повърхността има и други заряди то полето \vec{E} се получава като сума на отделните полета, за които важи направеното разглеждане, следователно отъясно на уравнението ще се получи сумата от зарядите.

В случая, когато зарядът е извън повърхността, при построяване на малък телесен ъгъл $d\omega$ се получават две повърхности, потоците през които се пресмятат по същия начин. Нормалата към една затворена повърхност по дефиниция е насочена отвътре навън, затова потокът през долната площадка е положителен $d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\omega$, а през горната е същият по големина, но отрицателен (фиг.5.1.2 б), затова сумарния поток е нула.

5.1.3 Работа на силите на електростатичното поле, потенциал

По дефиниция работата е силата \vec{F} по преместването $d\vec{r}$ е $\vec{F} \cdot d\vec{r}$, а силата, с която електричното поле действа на заряд q е $\vec{F} = q\vec{E}$, затова работата е:

$$dA = q\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Пълната работа извършена от електричното поле за придвижване на заряд q от точка 1 до 2 по някаква крива е:

$$A = q \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Ако полето е създадено от точков заряд Q :

$$A = q \int_1^2 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} \cdot d\vec{r} = q \int_1^2 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} r dr = q \int_1^2 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = q \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2} \right)$$

От получения резултат се вижда, че работата на силите на електростатичното поле зависи само от началното и крайно положение, и не зависи от пътя между тях, следователно те са потенциални. Ако началното и крайното положение (1 и 2) съвпадат работата е нула, такива сили се наричат консервативни. Работата може да се представи като $A = q(\varphi_1 - \varphi_2)$, като величината φ се нарича *потенциал* на

електричното поле. Потенциалната енергия на заряд q намиращ се в електрично поле с потенциал φ е $E_p = q\varphi$. За потенциала на точков заряд Q получихме:

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

В раздела за потенциална енергия получихме, че връзката между сила и потенциална енергия се изразява чрез градиент:

$$\vec{F} = -gradE_p$$

Като заместим с $\vec{E} = q\vec{E}$ и $E_p = q\varphi$, получаваме връзката между електричното поле и потенциала му:

$$\vec{E} = -grad\varphi \quad (5.4)$$

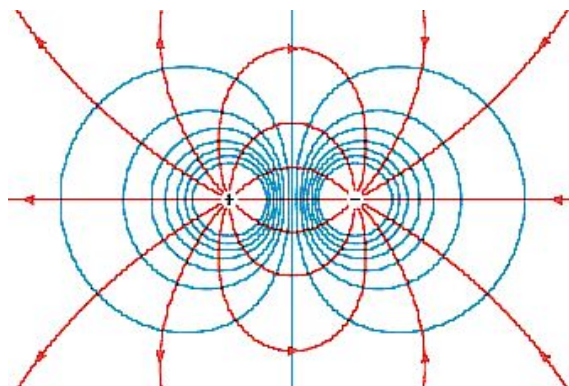
Потенциала на полето може да се изобрази графично, чрез повърхности, върху които той е постоянен (фиг. 5.3) – *еквипотенциални* повърхнини, а интензитета на електричното поле чрез линии към всяка точка, на които векторът \vec{E} е допирателен – *силови* линии. Да вземем две близки точки върху една и съща еквипотенциална повърхност и нека означим $d\vec{r}$ вектора с начало едната и край другата точка:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0,$$

следователно $\vec{E} \perp d\vec{r}$ – силовите линии на електричното поле са перпендикулярни на еквипотенциалните повърхности.

В система SI единицата за потенциал се нарича волт (V). В атомната физика широко се употребява извънсистемната единица *електрон-волт* (eV), дефинирана като работата извършвана при преместване на един електрон между 2 точки с потенциална разлика 1V. Числено $1eV = 1,6 \cdot 10^{-19} J$.

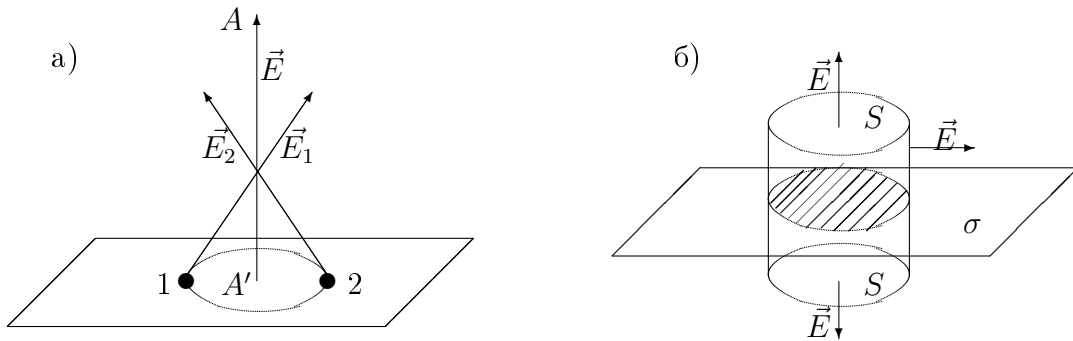
За потенциала, също както за електричното поле е в сила принципа на суперпозицията, с тази разлика, че потенциалите са скаларни величини, които се събират по-лесно.



Фигура 5.3: Електрични силови линии и еквипотенциални повърхности на два заряда.

5.1.4 Електрично поле на заредена безкрайна равнина.

Ще използваме теоремата на Гаус, за да пресметнем полето създадено от безкрайна равнина, заредена със заряд σ на единица площ. σ се нарича *повърхностна плътност* на заряда. Нека означим с A' проекцията на точка A върху равнината. Да вземем два точкови заряда 1 и 2 намиращи се на равни разстояния и разположени симетрично спрямо A' . те създават в т. A електрични полета \vec{E}_1 и \vec{E}_2 , а резултантното им поле $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ е насочено по правата aA' т.е. перпендикулярно на равнината (фиг.5.5 а). Ако точка A се намира от другата страна на равнината то отново резултатното поле ще ѝ бъде перпендикулярно, но насочено в противоположна посока. Като сумираме по всички подобни двойки заряди ще получим, че полето създадено от цялата равнина в произволна точка е перпендикулярно на равнината.



Фигура 5.4: Електрично поле на заредена безкрайна равнина.

Да построим една затворено повърхност представляваща цилиндър C , перпендикулярен на заредената равнина, съставена от околна цилиндрична повърхност O и два капак (K_1 и K_2 на равни разстояния от равнината. Потокът през цялата затворена повърхност е сума от потоците през тези три повърхности:

$$\Phi = \iint_C \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \iint_{K_1} \vec{E} \cdot \vec{n} dS + \iint_{K_2} \vec{E} \cdot \vec{n} dS + \iint_O \vec{E} \cdot \vec{n} dS$$

както се вижда от фиг.5.5 б) електричното поле и нормалите към долния и горния капак са успоредни, затова:

$$\iint_{K_1} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \iint_{K_1} E dS = E \iint_{K_1} dS = ES$$

Същият резултат се получава и за интеграла по долния капак. При интегрирането по околната повърхност, като вземем пред вид, че $\vec{E} \cdot \vec{n} dS = 0$ се получава, че интегралът е нула и затова:

$$\Phi = 2ES$$

Цилиндърът отсича от равнината един кръг с лице S (фиг.5.5 б), следователно зарядът затворен вътре е $Q = \sigma S$. Прилагайки теоремата на Гаус получаваме $2ES = \sigma S / \epsilon_0$:

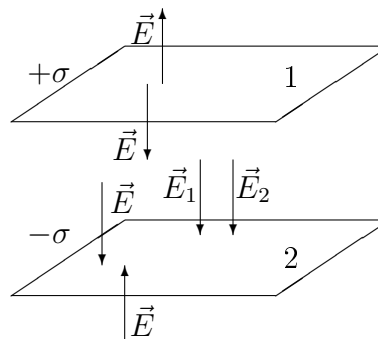
$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (5.5)$$

Използвайки формула (5.5) и принципа на суперпозицията можем да пресметнем електричното поле между две успоредни равнини, заредени с противоположни заряди с еднаква по големина повърхностна плътност σ .

На фиг.5.5 горната равнина създава поле \vec{E}_1 с големина σ/ϵ_0 насочено надолу, а долната равнина създава поле \vec{E}_2 със същата големина, насочено в същата посока. Резултантното поле е $E = E_1 + E_2$:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (5.6)$$

Аналогични пресмятания показват, че електричното поле над горната и под долната равнина е нула.



Фигура 5.5: Електрично поле между две заредени равнини.

5.2 Електрическо поле във веществото

При внасяне на вещество в електрично поле в зависимост от строежа му в него настъпват промени. Някои вещества като металите имат електрони, които могат да се движат свободно вътре в целия обем. Други са изградени от електрически неутрални атоми и молекули или имат кристална решетка съставена от йони. Електричното поле действа на всеки заряд q със сила $\vec{F} = q\vec{E}$. Неутралните атоми са изградени от отрицателни електрони и положителни ядра. Силите на електричното поле им действат в различни посоки, стремейки се да деформират атомите, така, че центровете на положителните и отрицателните заряди да се раздалечат. Като резултат атомите и веществото се *поляризират*. Веществата, в които се наблюдава този ефект се наричат *диелектрици*.

5.2.1 Електрическо поле в метали

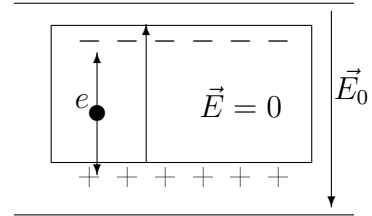
Когато металът бъде поставен в електрично поле то действа на всеки електрон в него със сила $\vec{F} = -e\vec{E}$. Под действието на тази сила електронът започва да се движи, докато достигне до края на метала. Така от едната му страна се натрупват отрицателни заряди, а от противоположната му страна остават некомпенсирани положителни заряди. Между двете групи заряди възниква електрично поле като между две успоредни равнини (5.6). Създаденото от тези заряди поле е насочено в обратна посока на външното поле и в един момент се изравнява с него (фиг.5.6). От този момент резултантното поле вътре в обема на метала става нула и движението на електроните спира.

От формула (5.4) следва, че щом електричното поле е нула, то потенциалът е константа, т.е. електричният потенциал вътре в обема на метала е постоянен и следователно повърхността на метала е екипотенциална.

Ако в метала има кухина, то и електричното поле вътре в кухината е нула - това свойство се използва за екраниране на електричното поле. С цел икономия

на метал и олекотяване се използва метална мрежа (Фарадеев кафез), с който се постига същия ефект.

Ако вземем парче метал и го заредим с някакви заряди, то порази отблъскването помежду си зарядите ще се движат докато се разположат върху повърхността. В един момент електричното поле вътре в обема на метала ще стане нула и движението на зарядите ще се прекрати. Поради наличието на заряди, извън него ще се създаде електрично поле, което е перпендикулярно на повърхността на метала – ако има тангенциална компонента зарядите ще се движат по повърхността на метала и прегрупират докато тя изчезне.



Фигура 5.6: Електрично поле в метал.

5.2.2 Електрически диполен момент

Два заряда с противоположни знаци $+q$ и $-q$ разположени на разстояние l един от друг образуват *електричен дипол* (фиг.5.7 а). Той се характеризира с величината *електричен диполен момент*:

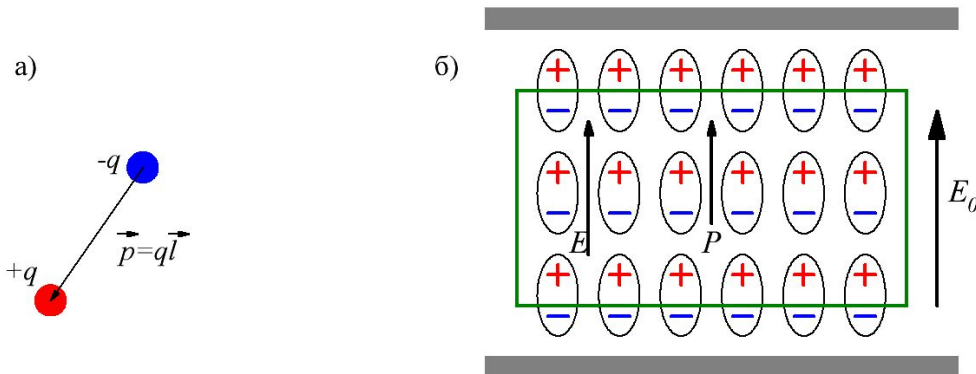
$$\vec{p}_e = q\vec{l} \quad (5.7)$$

Тук векторът \vec{l} има големина l и посока **от отрицателния към положителния заряд** (фиг.5.7).

По-горе видяхме, че при внасяне на атом в електрично поле настъпва отместване на отрицателните и положителните заряди. Такъв вид поляризация се нарича *електронна*. Възникналият диполен момент на атома е пропорционален на електричното поле:

$$\vec{p}_e = \varepsilon_0\beta\vec{E},$$

а величината β се нарича *поляризуемост* на атома. Тя има размерност на обем.



Фигура 5.7: а) Електричен дипол. б) Електрично поле във вещество.

Молекулите на някои вещества са съставени от атоми, като центровете на положителните и отрицателните им заряди не съвпадат – пример за такава молекула е водата. Те имат собствен диполен момент. Поради хаотичното топлинно движение на молекулите диполният им момент ще бъде ориентиран в различни посоки

като средно той ще бъде нула. Ако поставим такова вещество в електрично поле отделните диполи ще се стремят да се завъртят по посока на полето, така че веществото ще се поляризира. Такава поляризация се нарича *ориентационна*. На ориентацията на молекулите пречи топлинното движение, така че ориентационната поляризация, за разлика от електронната, ще зависи от температурата. При внасяне на йонни кристали в електрично поле също възниква поляризация поради отместване на положителните и отрицателните йони в кристалната решетка. Такава поляризация се нарича *йонна*.

5.2.3 Вектор на поляризацията

Поляризацията на едно вещество се характеризира чрез *вектора на поляризацията*:

$$\vec{P} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{p}_i}{V} \quad , \quad (5.8)$$

който е диполният момент в единица обем. В случаят на електронна поляризация получаваме $\vec{P} = \varepsilon_0 n \beta \vec{E}$, където n е броят на атоми в единица обем. Виждаме, че векторът на поляризацията е пропорционален на интензитета на електричното поле:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \kappa \vec{E} \quad (5.9)$$

Величината κ е безразмерна. Тя се нарича *възприемчивост*.

При поляризацията на веществото на повърхността му се натрупват електрически заряди. Повърхностната им плътност е свързана с вектора на поляризацията. На фиг.5.7 б) се вижда ако едно вещество се постави в електрично поле на единия му край се натрупват положителни, а на другия отрицателни заряди. Отместването на зарядите е l , следователно от всеки дипол се получава на повърхността заряд $\frac{p}{l}$. Ако повърхността има площ S целият заряд ще бъде $Q = \frac{P}{l}Sl$, следователно повърхностната плътност е:

$$\sigma = \frac{Q}{S} = P \quad (5.10)$$

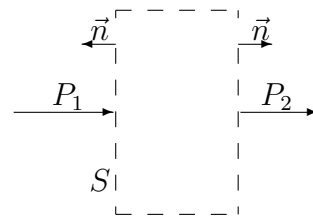
Ако повърхността не е перпендикулярна на вектора на поляризацията връзката ще бъде $\sigma = P_n$, като P_n е проекцията на \vec{P} върху нормалата към повърхността.

Повърхностните заряди създават електрично поле, което е насочено обратно на външното за веществото поле E_0 (фиг.5.7 б). Като използваме формула (5.6) за полето между две успоредни равнини получаваме, че резултантното поле във веществото е:

$$E = E_0 - \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Умножаваме по ε_0 , заместваем P със σ и получаваме:

$$\varepsilon_0 E + P = \varepsilon_0 E_0$$



Фигура 5.8: Теорема на Гаус за индукцията на електричното поле.

Величината $D = \varepsilon_0 E + P$ се нарича *индукция на електричното поле*. Заместваме P от формула (5.9) и получаваме:

$$D = \varepsilon_0(1 + \kappa)E = \varepsilon_0 \varepsilon E$$

Величината $\varepsilon = 1 + \kappa$ се нарича *диелектрична възприемчивост*. Тя е безразмерна и показва колко пъти интензитета на електричното поле във веществото е по-малко от външното поле:

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon}$$

Въвеждането на допълнително електрично поле – индукция D позволява да се опрости пресмятането на електричното поле при наличие на вещество тъй като D не зависи от него. Ако разгледаме един малък обем със стени (фиг.5.8) перпендикулярни на поляризацията, от теоремата на Гаус ще получим, че потокът на електричното поле е:

$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Тук Q е зарядът затворен вътре в обема, по стените на който интегрираме. Поради наличието на вещество се появяват допълнителни заряди свързани с поляризацията, затова да представим Q като сума от поляризационния заряд q_{pol} и останалите заряди не свързани с поляризацията:

$$Q = q + q_{\text{pol}}$$

Поляризационните заряди са свързани с вектора на поляризацията съгласно формула (5.10). В обема са влезли $P_1 S$ заряди, а са излезли $P_2 S$, затова можем да запишем, че $q = P_1 S - P_2 S$. Но $-P_1 S$ е потокът на поляризацията през едната стена, а $P_2 S$ е потокът на поляризацията през другата стена на обема, следователно можем да запишем, че:

$$q_{\text{pol}} = - \oiint \vec{P} \cdot \vec{n} dS$$

Замествайки в теоремата на Гаус получаваме:

$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{q}{\varepsilon_0} - \oiint \vec{P} \cdot \vec{n} dS \frac{1}{\varepsilon_0}$$

$$\varepsilon_0 \oiint \vec{E} \cdot \vec{n} dS + \oiint \vec{P} \cdot \vec{n} dS = q$$

и следователно:

$$\oiint \vec{D} \cdot \vec{n} dS = q$$

откъдето следва, че D не зависи от поляризационните заряди и следователно от веществото.

5.2.4 Пиезоелектричен ефект

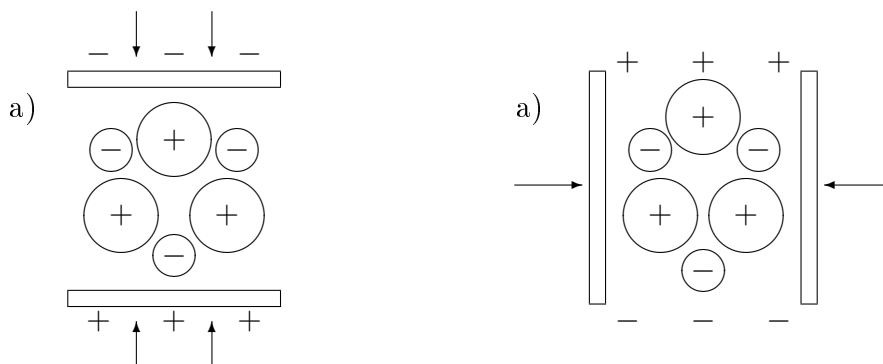
В някои кристали като кварца поляризацията е резултат от деформацията на кристалната решетка, която води до отместване на центровете на положителните и отрицателните заряди. Ефекта, при който в резултат на механична деформация по повърхността на кристала се появяват електрични заряди се нарича *пиезоелектричен ефект*. Механизмът на възникването му е показан на фиг.5.9. За да възникне такъв ефект кристалът не трябва да има център на симетрия. При еднородна деформация пиезоелектричният ефект се наблюдава при наличието на една или няколко *полярни ос*. При завъртане на 180° около ос перпендикулярна на полярната кристалът не съвпада сам със себе си.

Под действието на сила, действаща по посока на полярната ос настъпва отместване на положителните и отрицателните заряди както е показано на фиг.5.9 а), на повърхността на кристала се появяват заряди пропорционални на действащата сила. този ефект се нарича *надлъжен пиезоелектричен ефект*. Ако силите действат перпендикулярно на полярната ос на повърхността възникват противоположни заряди (фиг.5.9 б) – *напречен пиезоелектричен ефект*. Ако означим механичните напрежения действащи успоредно на двете оси с τ_x и τ_y , то поляризацията е:

$$P = d_{11}(\tau_x - \tau_y),$$

като $d_{11} = 2.31 \cdot 10^{-12} C/N$ се нарича *пиезоелектричен модул* на кварца.

Фигура 5.9 не съответства точно на структурата на кварца, който има формула SiO_2 , т.е. на един положителен (Si) съответствуват два отрицателни заряда (O), така че чертежа трябва да се разглежда като ефективен модел на елементарната клетка на кварца.



Фигура 5.9: а) Надлъжен пиезоелектричен ефект. б) Напречен пиезоелектричен ефект.

Съществува и обратното явление – под действието на електрично поле кристалът се деформира. Това се нарича *обратен пиезоелектричен ефект*.

5.3 Магнетизъм

Дълго време електричеството и магнетизма са били разглеждани отделно, докато Оерщед през 1820г. открил, че проводник, с протичащ по него ток, въздейства на магнитна стрелка както естествените магнити. Още същата година, след

серия опити Ампер доказва, че всички свойства на магнитите могат да бъдат обяснени като протичане на ток. С това той е направил второто обединение във физиката - на електричните и магнитните явления (първото обединение във физиката между небесната и земната механика е направено от Нютон). Обратният ефект, възникването на електрично при промяна на магнитното поле е открил Фарадей през 1831г.

5.3.1 Електричен ток

Електричният ток е скаларна величина равна на количеството електричество преминало за единица време през някаква площ:

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Разглеждаме движението на положително заредени частици, всяка със заряд q през напречното сечение на проводника S . Скоростта на всяка частица е v , а броят им в единица обем е n . За време dt една частица изминава разстояние $dl = vdt$. Броят на преминалите частици за това време през площта S е $dN = Sdl$, следователно преминалият заряд $dQ = qdN = qnSvdt$ и за тока получаваме:

$$I = \frac{qdN}{dt} = nSqv$$

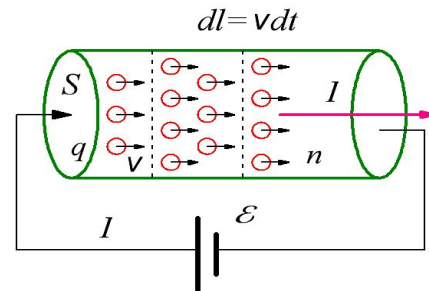
Като разделим силата на тока на площта, през която той тече, получаваме величина, която се нарича плътност на тока $j = I/S$. Тя е векторна величина - от формула (5.11) получаваме:

$$\vec{j} = nq\vec{v} = \rho\vec{v}, \quad (5.12)$$

където с ρ е означена плътността на заряда, т.е. електричният заряд в единица обем.

Видяхме, че ако сложим метал в електрично поле, в началния момент зарядите започват да се движат докато се натрупат на краищата му, полето вътре в метала ще стане нула и движението на зарядите ще спре. За да остане постоянен ток през метала трябва да има начин натрупваните се на единия му край електрони да се прехвърлят на другия му край.

Това може да стане ако между двата края (фиг.5.10) се включи електрическа батерия – тогава електроните се преместват за сметка на химичната реакция, която протича вътре в батерията. Тя се характеризира с *електродвижещо напрежение*. Това е работата \mathcal{E} на вътрешните сили за преместване на единичен заряд вътре между полюсите на батерията.



Фигура 5.10: Извод на закона на Ом.

5.3.2 Закон на Ом, закон на Джаул-Ленц

Нека между краищата на проводник приложим напрежението U създадено от батерията и ако дължината на проводника е l , то вътре възниква постоянно електричното поле E :

$$E = \frac{U}{l}$$

Вътре в проводника частиците се движат в постоянно електрично поле, в резултат се движат с ускорение $a = qE/m$. След време τ тя се удря в препятствие и губи скоростта си $v = a\tau$, след това пак се ускорява, пак се удря и т.н. Такова движение се нарича дрейф (фиг. 5.11). На такова движение отговаря средна скорост:

$$\bar{v} = \frac{qE\tau}{2m} = \frac{qU\tau}{2ml} \quad (5.13)$$

Във формулата за тока (5.11) можем да заместим средната скорост от горната формула получаваме *закона на Ом*:

$$I = nSq\bar{v} = \frac{nq^2\tau SU}{2ml} = \frac{U}{R}, \quad (5.14)$$

където величината R се нарича съпротивление и:

$$R = \frac{2ml}{nq^2\tau S} = \rho \frac{l}{S}$$

Величината $\rho = \frac{2m}{nq^2\tau}$ се нарича *специфично съпротивление*.

При всеки удар частицата губи кинетична енергия $mv^2/2$, която се отделя като топлина. В целия обем Sl има nSl частици, за време τ се отделя топлина:

$$Q = nSl \frac{mv^2}{2}$$

Заместваме скоростта от формула (5.13) и получаваме за отделената топлина за време τ :

$$Q = nSl \frac{q^2 U^2 \tau^2}{2ml^2}$$

Мощността P се получава като разделим Q на τ и я изразим чрез R :

$$P = \frac{U^2}{R},$$

получаваме *закона на Джаул - Ленц* за отделената топлина за единица време.

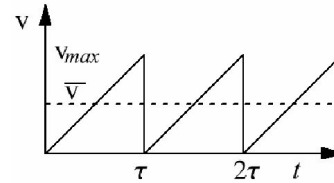
5.3.3 Магнитна индукция, закон на Био–Савар–Лаплас

Между движещите заряди освен електрическите кулонови сили, действат и други сили, които се описват чрез понятието за *магнитно поле*.

Около проводник намиращ се във вакуум, по който тече ток I , възниква магнитно поле, което се изучава с помощта на малка рамка, по която тече ток с големина I_0 . Да означим с \vec{n} единичен вектор, перпендикулярен на рамката, величината:

$$\vec{p}_m = I_0 S \vec{n},$$

където S е площта на рамката, се нарича *магнитен момент*, а самата рамка – *магнитен дипол*.



Фигура 5.11: Пресмятане на дрейфовата скорост.

Рамката е малка спрямо разстоянието до проводника и е аналог на пробния заряд, който използвахме при дефиниране на електричното поле.

Оставена да се върти свободно около ос показана на фиг.5.12 с пунктир, тя започва да се върти под действието на двойка сили действаща върху рамената ѝ, докато се разположи в една равнина с проводника. Ако означим максималния въртящ момент с M_{max} , отношението:

$$B = \frac{M_{max}}{p_m}$$

се нарича *магнитна индукция*, а посока на вектора \vec{B} се приема за перпендикулярна на равнината образувана от рамката и проводника, когато рамката остане в равновесие.

Био и Савар експериментирайки с праволинейни проводници с ток, установили7 зависимостта на магнитното поле от разстоянието и посоката му. За магнитното поле $d\vec{B}$ създадено от елемент от проводник (токов елемент) с ток I с дължина dl и с посока по допирателната до съответната точка на проводника, Лаплас е получил формулата:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} d\vec{l} \times \vec{r},$$

наричана *закон на Био–Савар–Лаплас*. Магнитната индукция на краен проводник се получава като сумираме полето създадено от всички елементи на проводника:

$$\vec{B} = \int_i d\vec{B}$$

Константата μ_0 се нарича *магнитна проницаемост на вакуума* и големината ѝ се определя от системата мерни единици. В система SI магнитната индукция се измерва в тесла (Т).

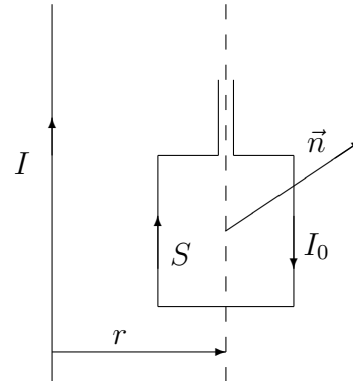
5.3.4 Магнитно поле на прав проводник

Магнитната индукция на безкраен прав проводник, по който тече ток I , ще пресметнем, като го разделим на елементи с дължина dl . На фиг.5.13 с a сме означили разстоянието от точката, в която изчисляваме магнитната индукция, до проводника, с r разстоянието от точката до елемента dl . От правоъгълния триъгълник следва:

$$l = a \operatorname{ctg} \alpha, \quad dl = -\frac{a d\alpha}{\sin^2 \alpha}, \quad a = r \sin \alpha$$

и замествайки в закона на Био–Савар–Лаплас за големината на dB получаваме:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} dl \sin \alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \frac{a d\alpha}{\sin^2 \alpha} \sin \alpha$$



Фигура 5.12: Дефиниция на магнитната индукция.

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \sin \alpha d\alpha$$

Интегрираме по α в граници от 0 до π :

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cos \alpha \Big|_0^\pi = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

От правилото за векторно произведение се получава, че посоката на \vec{B} е насочена от равнината на чертежа към нас – и наистина, гледайки от тази посока, ние завъртаме първия вектор ($d\vec{l}$) в положителна посока докато съвпадне с \vec{r} . За бързо намиране на посоката на \vec{B} се използва *правилото на дясната ръка*, според което като хванем с дясната си ръка проводника, така, че палеца да сочи посоката на тока, свитите пръсти са по посоката на силовите линии на магнитното поле.

Дефиницията за силова линия е същата както при електричното поле. В случая на прав проводник те са концентрични окръжности около него.

5.3.5 Действие на магнитното поле върху проводник с ток, сила на Лоренц

Законът за силата, с който магнитното поле действа на проводник, по който тече електричен ток е бил открит от Ампер. Според него силата, с която магнитното поле \vec{B} действа на токов елемент $d\vec{l}$ е:

$$d\vec{F} = I(d\vec{l} \times \vec{B})$$

Действието на магнитното поле върху проводник със ток се основава на действието му върху заредените частици, които се движат по проводника (фиг.5.10). Във формула 5.11 получихме, че токът през проводника е свързан със заряда, скоростта и концентрацията на носителите $I = nSqv$.

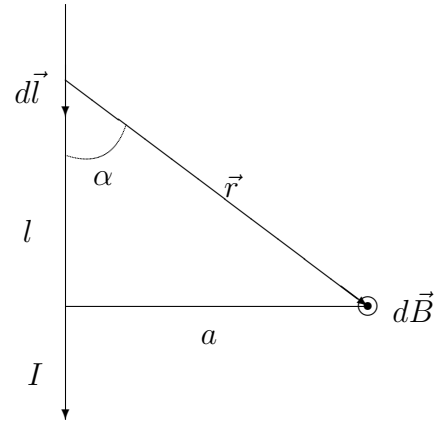
Замествайки в закона на Ампер, за силата действаща на един токов елемент получаваме:

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} = nSqvd\vec{l} \times \vec{B} = nSlqd\vec{v} \times \vec{B} = nVqd\vec{v} \times \vec{B} = dNq\vec{v} \times \vec{B}$$

и следователно силата, с която магнитното поле действа на една частица е:

$$\frac{d\vec{F}}{dN} = \vec{F}_l = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Силата \vec{F}_l се нарича Лоренцова сила. Виждаме, че магнитното поле действа само върху **движещи** се заряди. Формулата е проверена експериментално при движението на елементарни частици в магнитно поле. Всъщност фундаментална е именно силата на Лоренц, а законът на Ампер е нейно следствие, тъй като магнитното



Фигура 5.13: Пресмятане на магнитното поле на безкраен проводник с ток.

поле действа върху движещите се в проводника частици, което се проявява като сила на Ампер.

Мощността на сила се пресмята като $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$, следователно мощността на магнитното поле е $P = q\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$, но силата на магнитното поле е перпендикулярна на скоростта, скаларното произведение на перпендикулярни вектори е нула, следователно $P = 0$ – мощността на магнитното поле е нула, то не върши работа.

5.3.6 Сили между два успоредни проводника с ток

Нека по два успоредни проводника протичат токове I_1 и I_2 в еднакви посоки както е показано на фиг.5.14 Един проводник с ток I_1 създава на разстояние a магнитно поле:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a},$$

ако на това разстояние, успоредно на първия е поставен втори проводник с ток I_2 , първия проводник действа на токов елемент $I_2 dl$ от втория със сила:

$$dF_{12} = I_2 dl B_1,$$

която е насочена към първия проводник. Като заместим със стойността на магнитното поле B_1 получаваме:

$$dF_{12} = dl \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$$

Това е силата, с която токовият елемент се привлича от първия проводник. На единица дължина силата е $F = dF_{12}/dl$:

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \quad (5.15)$$

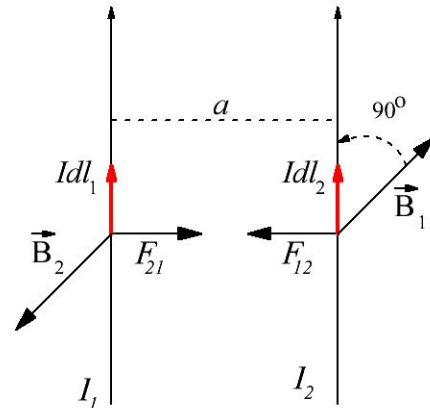
За силата, с която втория проводник действа на токов елемент от първия, аналогично получаваме:

$$dF_{21} = I_1 dl B_2, \quad dF_{21} = dl \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$$

Вижда се, че тя е същата по големина и обратна по посока, както следва от третия закон на Нютон.

Силата, действаща на два успоредни проводника зависи от посоката на токовете, ако те са в еднакви посоки това е сила на привличане, ако са в обратни – на отблъскване.

Тази формула (5.15) се използва за определяне на единицата за големина на тока, която е основна в система SI. По дефиниция ток със сила 1 A е този ток, при който два проводника, по които той протича, си взаимодействат със сила $2 \cdot 10^{-7}$ N на дължина 1 m. Оттук се получава и големината на μ_0 .



Фигура 5.14: Сили между два успоредни проводника с ток.

5.3.7 Движение на заредени частици в еднородно магнитно и електрично поле

Еднородно (хомогенно) магнитно поле е поле еднакво във всички точки на пространството. Да разгледаме движението на една частица със заряд q и скорост v перпендикулярно на магнитното поле. Силата на Лоренц ще бъде $F = qvB$ перпендикулярно на скоростта – под действието ѝ скоростта на частицата ще се измени по посока, но не и по големина, понеже магнитното поле не върши работа, следователно кинетичната енергия и оттам скоростта не се променят. Частицата започва да се движи по окръжност с постоянна скорост, като лоренцовата сила играе роля на центростремителна:

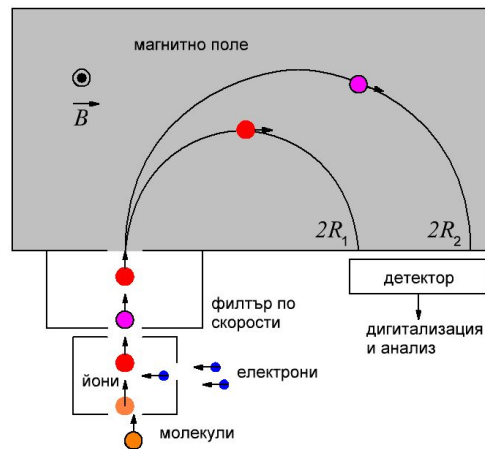
$$qvB = \frac{mv^2}{R}, \quad R = \frac{mv}{qB} = \frac{p}{qB}$$

Радиусът на окръжността зависи от *специфичния заряд* q/m на частицата, частиците с по-голям импулс се движат по окръжности с по-големи радиуси, ако магнитното поле е голямо, то радиусът е малък. Посоката, в която се завъртат частиците зависи от техния знак – две частици с еднакви специфични заряди и скорости се движат по окръжности с еднакви радиуси, но в противоположни посоки.

В случая, когато частиците навлизат под ъгъл спрямо магнитната индукция, скоростта им може да се разложи на 2 компоненти – успоредна v_{\parallel} и перпендикулярна v_{\perp} на полето. Лоренцовата сила зависи само от перпендикулярната компонента. Движението се извършва по винтова линия около \vec{B} – равномерно със скорост v_{\parallel} по посока на полето и по окръжност с радиус $R = \frac{mv_{\perp}}{qB}$ в равнина перпендикулярна на \vec{B} .

Това движение извършват частиците идващи от Космоса, навлизащи в магнитното поле на Земята. Те се навиват около магнитните силови линии и се придвижват към Земяните полюси. Когато концентрацията им стане голяма, лъчението предизвикано от възбуждането на атомите на атмосферата става видимо и се наблюдава като полярно сияние.

Разглеждаме движението на частица, намираща се в хомогенно електрично поле, която първоначално е неподвижна. Полето се създава от две плочи, между които е приложена потенциална разлика $\Delta\varphi = U$. Под действието на електричната сила $F = qE$, частицата се ускорява и кинетичната ѝ енергия става:



Фигура 5.15: Масов спектрограф на Бейнбридж.

$$\frac{mv^2}{2} = qU, \quad v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$$

Такова ускоряване на електрони става в устройството наречено електронна пушка. Електроните се отделят от нагрят катод, ускоряват се в електрично поле, полученият сноп се формира в електронно лъчева тръба.

Устройство, в което има взаимно перпендикулярни електрично и магнитно поле се нарича *селектор на скорости*. Частиците навлезли перпендикулярно на полетата със скорост: $v = \frac{E}{B}$ не се отклоняват, докато траекториите на останалите се закривяват.

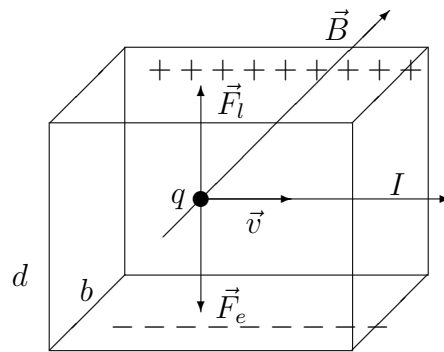
Разделянето на йонизирани атоми и молекули с електромагнитни методи се извършва от уреди, наречени *масови спектрографи*. Ще разгледаме принципа на действие на спектрографа на Бейнбридж (фиг.5.15). Йонизираните частици се ускоряват в електрично поле и се пропускат през селектор на скорости. Преминалите през него йони навлизат перпендикулярно в магнитно поле, което ги отклонява по окръжности с радиуси зависещи от специфичния им заряд, описват полуокръжност и попадат върху фотоплака. Полученият спектър представлява успоредни линии с различна плътност. По положението на линиите се определя специфичния заряд, а по плътността концентрацията на частиците.

5.3.8 Ефект на Хол

При протичане на ток по проводник, разположен перпендикулярно в магнитно поле между краищата му, успоредно на магнитното поле, възниква потенциална разлика $\Delta\varphi$ – *ефект на Хол*.

По-рано изведохме връзката между тока и скоростта на токовите носители $I = nqvS$, където n са броят частици в единица обем q е зарядът им, v е скоростта им, а S е площта, през която преминава тока.

На всяка частица действа лоренцова сила $F_l = qvB$ (фиг.5.16), под действието на която частиците се придвижват нагоре и там се натрупва положителен заряд, а отдолу остава отрицателен заряд, в резултата ще възникне електрично поле насочено вертикално надолу. С натрупването на положителни заряди отгоре електричното поле ще расте, този процес ще продължи докато силата на електричното поле $F_e = qE$ не се изравни с лоренцовата сила:



Фигура 5.16: Ефект на Хол

$$qE = qvB, \quad E = vB = \frac{IB}{nqS} = \frac{IB}{nqdb}$$

Ако означим разстоянието между горния и долния край на проводника с d , потенциалната разлика ще бъде $\Delta\varphi = Ed$ и за нея получаваме:

$$\Delta\varphi = \frac{IB}{nqb} = R \frac{IB}{b}$$

Константата $R = \frac{1}{qn}$ се нарича константа на Хол, нейното експериментално измерване позволява определянето на произведението от заряда и броят на носителите на ток в единица обем, а по знака на R можем да определим знака на частиците. Ефекта на Хол се използва в датчиците на Хол за измерване на магнитната индукция.

5.3.9 Поток и циркулация на магнитното поле, закон на Фарадей

За електричното поле дефинирахме величината поток на интензитета (стр.67 формула (5.2)). Магнитната индукция е векторна величина, затова аналогично и за нея можем да дефинираме *поток на магнитната индукция*:

$$d\Phi_B = \iint \vec{B} \cdot \vec{n} dS \quad (5.16)$$

В случая на електрично поле се доказва теоремата на Гаус (стр.67 формула (5.3)), която свързва потока през затворена повърхност със заряда затворен вътре. Аналогична теорема има и за магнитното поле, но тъй като магнитни заряди не съществуват, затова потокът на магнитната индукция през произволна затворена повърхност е винаги нула:

$$\Phi_B = 0 \quad (5.17)$$

Английският физик Пол Дирак е предположил, че съществуват магнитни заряди, наречени монополи, което може да обясни квантуването на електричния заряд, но те не са открити до сега. Интегралът по затворен контур:

$$\Gamma_B = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

се нарича *циркулация* на магнитното поле. Лесно можем да пресметнем циркулацията по окръжност, концентрична на прав проводник със ток. Като вземем пред вид, че векторът на магнитната индукция е допирателен до окръжността и има големина $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, получаваме:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \oint dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} 2\pi r = \mu_0 I$$

Полученият резултат е валиден и в общия случай за произволен контур и токове:

$$\Gamma_B = \mu_0 I$$

като токът I е сумата от всички токове, които пронизват площта заградена от контура. Тези токове, които текат в такава посока, че гледано от нея виждаме, че обикаляме контура в положителна посока, се вземат със знак плюс, а тези, от чиято посока се вижда, че контура се обикаля в отрицателна посока се вземат с отрицателен знак.

Този закон е валиден за постоянни или бавно променящи се токове. Максвел е добавил още един член в дясната страна, с което законът става валиден за всички случаи:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \frac{1}{c^2} \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (5.18)$$

Величината c , която е $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$, има размерност на скорост.

Максеул е показал, че в празното пространство, решенията на неговите уравнения е вълна, която се движи със скорост c .

По същия начин се въвежда и величината циркулация на електричното поле:

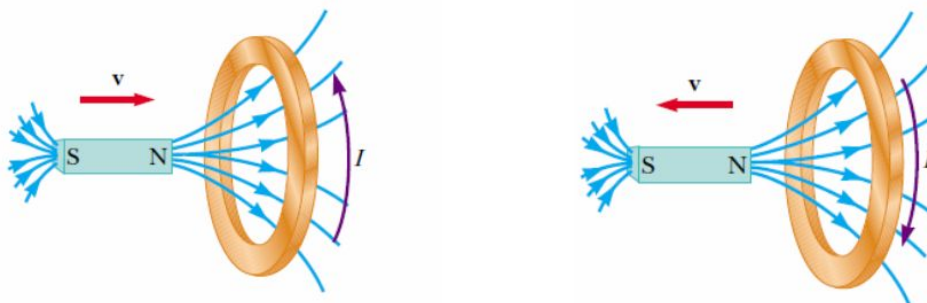
$$\Gamma_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l},$$

но това е работата, която се извършва от електричното поле за пренасяне на единичен заряд по контура, което по-рано дефинирахме като електродвижещо напрежение \mathcal{E} . Ако полето е електростатично, тази работа е равна на разликата от потенциалите в началото и края, а тъй като те съвпадат, то циркулацията на електростатичното поле е нула.

През 1831 г. Фарадей открива *закона за електромагнитната индукция*, че промяната на магнитното поле води до поява на електрично поле. Законът за електромагнитната индукция е изразен математически от Максвел. Той свързва циркулацията на електричното поле по затворен контур и потокът на магнитното поле през повърхността оградена от този контур.

$$\Gamma_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (5.19)$$

На фигура 5.17 е показано възникването на електрично поле в контур при движение на магнит. По контура е сложен затворен проводник, така, че под действието на електричното поле започва да тече електричен ток. Неговата посока зависи от това дали потокът през контура расте или намалява. В сила е правилото на Ленц, според което токът тече в такава посока, че създаденото от него магнитно поле да действа в обратна посока на създаващият го поток (причината е знакът минус в законът на Фарадей).



Фигура 5.17: Индуциране на електрично поле.

Съображенията на Максвел за добавяне на втори член се основават на закона за запазване на заряда. Да приложим закона на Ампер за циркулацията към контура

на фиг. 5.18, с избрана посока на обикаляне. За изберем повърхност 1, която е над контура можем да запишем, че: $\Gamma_B = \mu_0 I_1$, докато за долната повърхност 2 е в сила $\Gamma_B = -\mu_0 I_2$. Като съберем двете уравнения получаваме за тока протичащ през затворената повърхност е в сила:

$$I_1 + I_2 = 0$$

Токът течащ през затворена повърхност е свързан със заряда затворен от тази повърхност:

$$-\frac{dQ}{dt} = I_1 + I_2,$$

защото ток през затворена повърхност може да има само за сметка на намаляване на заряда затворен в нея.

Ако използваме предложеното от Максвел уравнение (5.18) получаваме:

$$\Gamma_B = \mu_0 I_1 + \frac{1}{c^2} \frac{d\Phi_1}{dt}, \quad \Gamma_B = -\mu_0 I_2 - \frac{1}{c^2} \frac{d\Phi_2}{dt}$$

Изваждаме двете уравнения и получаваме:

$$I_1 + I_2 = -\frac{1}{c^2} \left(\frac{d\Phi_1}{dt} + \frac{d\Phi_2}{dt} \right) = -\frac{1}{c^2} \left(\frac{d\Phi_E}{dt} \right),$$

където с Φ_E сме означили потокът на интензитета на електричното поле през затворената повърхност $\Phi_1 + \Phi_2$. Като приложим теоремата на Гаус за потока на електричното поле през произволна затворена повърхност и диференцираме по времето получаваме:

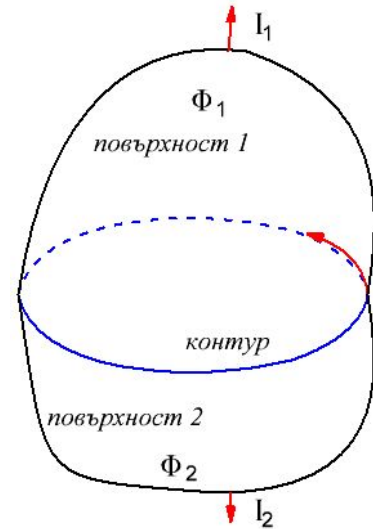
$$\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad \frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{dQ}{dt}$$

$$\mu_0(I_1 + I_2) = -\frac{1}{c^2} \left(\frac{d\Phi_E}{dt} \right) = -\frac{1}{c^2 \epsilon_0} \frac{dQ}{dt}$$

И окончателно:

$$I_1 + I_2 = -\frac{1}{c^2 \mu_0 \epsilon_0} \frac{dQ}{dt} = -\frac{dQ}{dt},$$

както се изисква от закона за запазване на заряда.



Фигура 5.18: Илюстрация на необходимостта от допълнителен член в закона на Ампер.

5.4 Магнитно поле във веществото

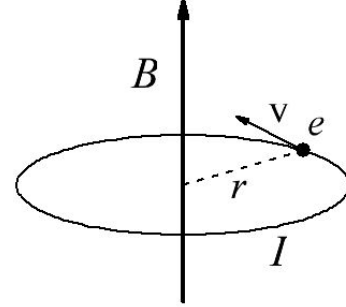
Майкъл Фарадей е поставил различни вещества в магнитно поле с голям градиент и е открил, че някои (например медта) слабо се отблъскват, други (като алуминия) слабо се привличат, а желязото се привлича много силно. Трите вида вещества са били наречени диамагнетици, парамагнетици и феромагнетици.

5.4.1 Диамagnetизъм

Да предположим, че атомите на веществото представляват електрон със заряд e , обикалящи около ядрото на разстояние r .

При внасянето на веществото в магнитно поле B потокът на полето през площта оградена от обикалящият около едно ядро електрон ще се измени от 0 до $\Phi = B\pi r^2 \cos \theta$, където θ е ъгълът между магнитното поле и нормалата към площта. В контурът заобикалящ тази площ (това всъщност е траекторията на електрона) се индуцира електродвижещо напрежение:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt},$$



Фигура 5.19: Индуциране на магнитен момент.

което създава кръгово електрично поле E с интензитет

$$E = \frac{\mathcal{E}}{2\pi r},$$

действащо върху електрона със сила $F = -eE$, която създава момент на сила $M = Fr \cos \theta$. Връзката между изменението на момента на импулса на електрона и момента на силата е:

$$\frac{dL}{dt} = M,$$

така че в крайна сметка можем да запишем:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{e \cos \theta}{2\pi} \frac{d\Phi}{dt}$$

Интегрираме от началния момент до момента, в който магнитното поле във веществото остава постоянно и за индуцираният момент на импулса получаваме:

$$L = \frac{e}{2} r^2 \cos^2 \theta B$$

Моментът на импулса на електрона е свързан с магнитния момент:

$$L = mvr,$$

$$p_m = \pi r^2 I = \pi r^2 \frac{(-e)}{T} = \pi r^2 \frac{(-e)v}{2\pi r} = -\frac{rev}{2},$$

затова:

$$p_m = -\frac{e}{2m} L$$

Полученото съотношение се нарича *гиромагнитно*. За индуцираният магнитен диполен момент получаваме:

$$p_m = -\frac{\cos^2 \theta}{2m} r^2 e^2 B$$

Като усредним по всички възможни ъгли θ

$$\langle \cos^2 \theta \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin \varphi d\theta d\varphi = -\frac{1}{2} \int_0^\pi \cos \theta^2 d \cos \theta = \frac{1}{3}$$

получаваме:

$$p_m = -\frac{r^2 e^2}{6m} B$$

Като умножим по броят на атомите в единица обем n ще получим диполният момент в единица обем, т.е. векторът на намагнитеността:

$$\vec{M} = -\frac{nr^2 e^2}{6m} \vec{B}$$

Вижда се, че намагнитеността е обратна на външното магнитно поле, което означава, че полето във веществото намалява. Такова вещество се нарича *диамагнетик*.

5.4.2 Парамагнетизъм

Ефектът на диамагнетизма съществува във всички вещества, но в много случаи той не може да се прояви поради други ефекти. Много вещества са съставени от атоми, които имат собствен магнитен момент, т.е. те представляват магнитни диполи (такива са всички атоми, които имат нечетен брой електрони). Поставен в магнитно поле тъкъв магнитен дипол се ориентира по посока на полето, следователно векторът на намагнитеността е насочен в същата посока като външното магнитно поле. Такива вещества се наричат *парамагнетици* Аналогично на случая на вещество в електрично поле и тук се въвежда поле, което не зависи от веществото, то се нарича *интензитет на магнитното поле* и обикновено се означава с H :

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} \tag{5.20}$$

Векторът на намагнитеността M и интензитетът на магнитното поле имат една и съща размерност A/m и са свързани: $M = \chi H$

Величината χ се нарича *магнитна възприемчивост* и е безразмерна. За диамагнетиците тя е отрицателна, а за парамагнетиците – положителна. Като заместим във формула 5.20 получаваме за съотношението между индукцията и интензитета на магнитното поле:

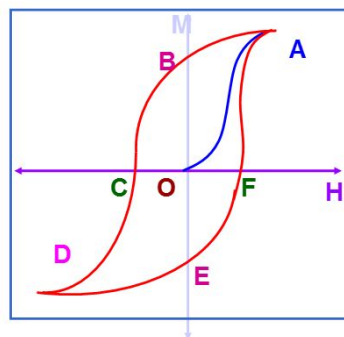
$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}, \tag{5.21}$$

където $\mu_r = 1 + \chi$ е безразмерна величина и се нарича *относителна магнитна проницаемост*. Очевидно, че за диамагнетиците $\mu_r < 1$ и следователно магнитното поле вътре в тях е по-слабо от външното магнитно поле, а при парамагнетиците $\mu_r > 1$ и вътрешното магнитно поле е по-голямо от външното.

5.4.3 Феромагнетизъм, феримагнетици и антиферомагнетици

Има група вещества, най характерен представител е желязото, чиито атоми имат собствен магнитен момент. Те образуват кристална решетка във вид на йони. Често квантови ефекти водят до това, че между тях възникват силни взаимодействия (обменно взаимодействие), които карат магнитните моменти да се ориентират успоредно едни на други, в резултат на което магнитното поле става много силно.

На фигура 5.20 е показана как намагнитеността на феромагнетик M се увеличава с увеличаване на индукцията H . Започвайки от ненамагнитено вещество, намагнитеността първоначално се променя по кривата OA и достига насищане в A . Когато H намалява, M намалява, но не става нула при $H = 0$. Веществото е станало постоянен магнит, като OB е остатъчният магнетизъм. За да демагнетизираме веществото трябва да приложим обратно магнитно поле. Това става като се приложи интензитет OC , който се нарича коерцитивна сила.



Фигура 5.20: Хистерезисна крива.

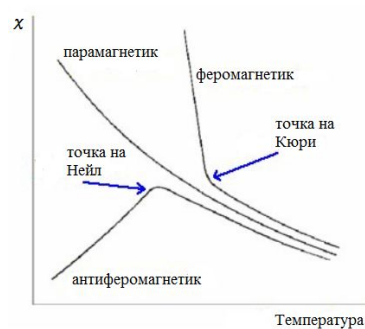
След достигане на нивото на насищане D , H сменя посоката си и кривата отново достига A завършвайки цикъла. Цикълът $ABCDEF A$ се нарича хистерезисна крива.

Площта заградена от кривата е пропорционална на работата извършвана при цикъла на намагнитизиране-демагнитизиране и се отделя като топлина.

Материалите (като желязото) с тесен цикъл се използват в трансформаторите, а тези с широк (като стоманата) се използват за постоянни магнети.

Магнитните моменти на атомите не винаги се ориентират успоредно един на друг. За някои материали ориентацията е в обратни посоки. Например мангановият окис има кристална структура съставена от $O-2$ йони, които нямат магнитен момент и Mn^{+2} йони, които имат. Именно диполните моменти на мангановите йони се ориентират противоположно, така, че намагнитеността е нула. Такива вещества се наричат *антиферомагнетици*. При други вещества като $NiFe_2O_4$ и $ZnFe_2O_4$ атомите имат различни магнитни моменти, като част се ориентират паралелно, а част антипаралелно. Като резултат техният магнитен момент не е нула, но не е голям. За разлика от феромагнетиците те не са проводници.

Намагнитеността на тези вещества силно зависи от температурата. Температурното движение на атомите води до разбъркване на ориентацията на магнит-



Фигура 5.21: Температурна зависимост на магнитните вещества.

ните им моменти - това нараства с нарастването на температурата. Над някоя критична температура, наричана точка на Кюри, феро- и феримагнетните материали вече не си взаимодействат обменно. Те стават парамагнетици. При антиферомагнетиците съответната температура се нарича точка на Неел. На фиг.5.21 е показана зависимостта на магнитната възприемчивост χ за трите вида магнитни материали.

Сравнение между електричните и магнитните величини			
ЕЛЕКТРИЧЕСТВО		МАГНЕТИЗЪМ	
\vec{E}	интензитет на ел. поле	\vec{B}	индукция на маг. поле
\vec{D}	индукция на ел. поле	\vec{H}	интензитет на маг. поле
\vec{P}	вектор на поляризацията	\vec{M}	вектор на намагнитеността
κ	електрическа възприемчивост	χ	магнитна възприемчивост
$\epsilon_r = 1 + \kappa$	относит. ел. проникваемост	$\mu_r = 1 + \chi$	относит. маг. проникваемост
	$\vec{P} = \epsilon_0 \kappa \vec{E}$	$\vec{M} = \chi \vec{H}$	
	$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$	$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$	
	$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$	$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$	

Таблица 5.1: Електрично и магнитно поле във вещество.

Глава 6

Светлина

6.1 Физична природа на светлината

Светлината е единствената проява на електромагнитното поле, което можем да възприемем с нашите сетива, която ни носи най-голямата част от информацията за света, който ни обкръжава. Това обаче става с помощта на физиологичните процеси протичащи в очите и мозъка на човек, затова не бива да се поставя знак на равенство между светлината като физично явление и физиологично възприятие.

Въпросът за същността на светлината е вълнувал хората отдавна, но едва в началото на 18 век са възникнали теории, обясняващи се светлинните явления. В борбата между вълновата и корпускулярната теория през 19 век пълна победа е удържала вълновата теория. Според нея светлината представлява процес на разпространение на вълни, природата на тези вълни се е изяснила със създаването на електродинамиката – светлината представлява електромагнитни вълни. Чувствителността на нашите очи ни позволява да възприемаме вълни с честота в определен интервал честоти. Изследванията показват, че нашето възприятие за цвят отговаря на честотата.

Интензитета на вълните възприемаме като сила на светлината, но тук трябва да имаме пред вид, че човешкото око има различна чувствителност към различните цветове.



цвят:	виол.	син	св.-син	зелен	ж.-зел.	жълт	оран.	червен
$\lambda(nm)$	380–450	450–480	480–510	510–550	550–575	575–585	585–620	620–760

Таблица 6.1: Зависимост на цвета от дължината на вълната във вакуум.

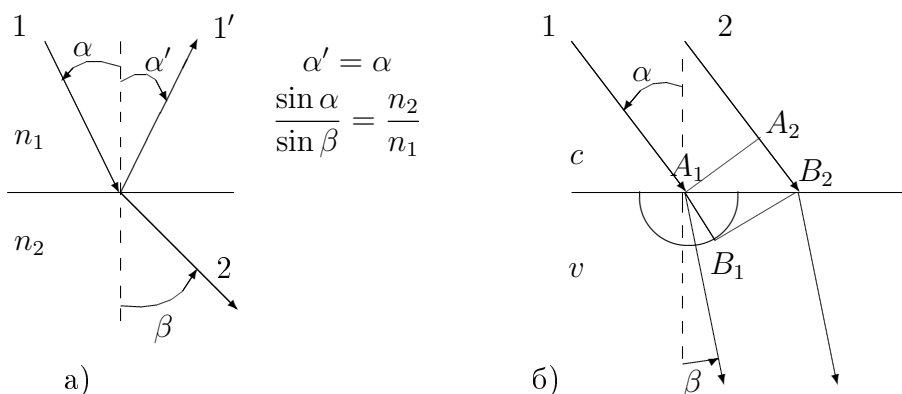
В първо приближение разпространението на светлината може да се опише като праволинейно движение. Разделът от физиката, който описва светлината по този начин се нарича *геометрична оптика*. Според корпускулярната теория светлината представлява поток от частици, движещи се със скоростта на светлината, тя обаче се оказва неспособна да обясни явлението *интерференция*. Описанието на светлината като вълна се нарича *вълнова оптика*. През 19 век Максвел е направил третото обединение във физиката – на електричеството, магнетизма и светлината. Той създава електродинамиката и теоретично установява, че скоростта на електромагнитните вълни съвпада със скоростта на светлината, с

което се слага началото на описанието на светлината като електромагнитни вълни. Експериментално обаче е било открито, че тя има и корпускуларни свойства. Корпускуларните и вълновите свойства на светлината се обясняват от квантовата теория. Според съвременните представи светлината представлява поток от частици – *фотони*, движението на които се описва с вълнова функция – аналогично на описанието на другите елементарни частици. Разделът от физиката, който използва такова описание за светлината се нарича *квантова оптика*.

6.1.1 Геометрична оптика

Геометричната оптика се получава като приближение на вълновата, когато оставим дължината на вълната да клони към нула. Разпространението на светлината се описва като *светлинни лъчи*, а на всяка среда се приписва *коэффициент на пречупване* n . При преминаването на светлина от една среда в друга, част от нея се отразява, а част се пречупва. В сила са :

- *закон за отражението на светлината* – ъгълът на падането α е равен на ъгъла на отражението α' – фиг.6.1 а). Ъглите се измерват спрямо нормалата към границата между двете среди;
- *закон за пречупването на светлината* (закон на Снелиус) – $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}$. С n_1 и n_2 са означени коефициентите на пречупване на двете среди. Този закон се използва за определяне на коефициента на пречупване, като коефициента на пречупване на вакуума се приема за единица.
- *падащият, отразеният и пречупеният лъч лежат в една равнина.*



Фигура 6.1: Пречупване на светлината.

Коефициентът на пречупване е константа зависеща от дължината на вълната на светлината – поради това при преминаването от една среда в друга бялата светлина се разлага на цветовете от които се състои. Във вълновата оптика се доказва, че $\frac{n_1}{n_2} = \frac{v_2}{v_1}$ (фиг.6.1 б), където n_1 и n_2 са коефициентите на пречупване на светлината, а v_1 и v_2 са скоростите на светлината в двете среди (виж стр.97).

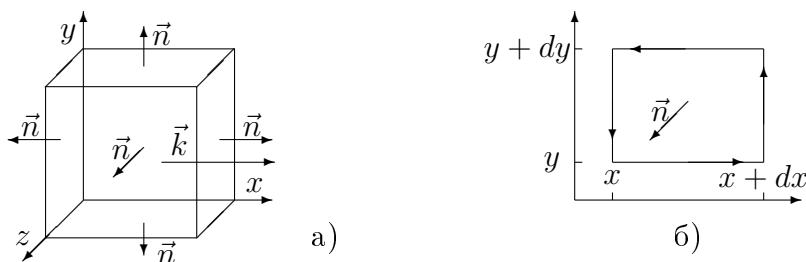
При преминаване от една среда в друга честотата на светлината ν не се променя, но поради съотношението

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{c}{n\nu} = \frac{\lambda_{vac}}{n}$$

дължината на вълната λ се променя, затова, когато говорим за дължина на вълната, подразбираме дължината на вълната във вакуум λ_{vac} .

6.1.2 Електромагнитна природа на светлината

В средата на XIX век Джеймс Кларк Максвел 'превел' експерименталните резултати и идеите на Фарадей на математически език. Той въвел много нови понятия като интензитет и индукция, поток, потенциал, плътност на тока. Формулираните от него закони сега се наричат *уравнения на Максвел*. Разбира се оригиналните уравнения нямат съвременния си вид, те даже са били повече от 4, но в едно от тях, което всъщност е законът за циркулацията на магнитното поле, Максвел е добавил нов член, който е бил необходим, за да се съгласува със закона за запазването на електричния заряд. В резултат на това се оказва, че във вакуум, даже без наличието на заряди, може да съществуват електрично и магнитно поле, които се разпространяват като вълна. Максвел е изчислил скоростта ѝ и се оказало, че тя е много близка до скоростта на светлината. От тук Максвел направил извод, че "светлината се състои от напречни колебания на същата среда, която е причина за електричните и магнитните явления". Всъщност в началото Максвел е построил механичен модел на електричните и магнитните явления, но след като получава уравненията престава да се занимава с такива модели.



Фигура 6.2: а) Пресмятане на потока и б) на циркулацията на интензитета на електричното поле.

Ще предположим, че в празното пространство се разпространява плоска електромагнитна вълна, следователно за интензитета на електричното поле можем да запишем:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

За простота сме ориентирали координатната система така, че оста x да съвпада с посоката на разпространение на вълната (вълновия вектор \vec{k} е насочен по оста x , както е показано на фиг.6.1.2 а).

Каква е ориентацията на вектора \vec{E}_0 ? Ако той е успореден на оста x то вълната е надлъжна, ако е перпендикулярен – напречна. Да предположим, че вълната

е надлъжна и да пресметнем потокът на електричното поле през затворената повърхност образувана от 6-те стени на един куб както е показан на фиг.6.1.2 а).

Потокут през горната, долната, предната и задната стена е нула, тъй като полето е перпендикулярно на нормалите към тези стени. Различени от нула са потоците през лявата и дясната стена. За пълния поток получаваме :

$$\Phi = E_0 S e^{i\omega t} (e^{ikx_2} - e^{ikx_1}) \neq 0$$

Обаче съгласно теоремата на Гаус $\Phi = 0$ тъй като в празното пространство, следователно и вътре в куба, няма електрически заряди, следователно предположението за надлъжност на електричното поле е невярно.

Да видим сега какво е съотношението между интензитета на електричното поле и индукцията на магнитното поле. За целта ще пресметнем циркулацията (електродвижещото напрежение) на електричното поле по контура показан на фиг.6.1.2 б). Сега ще използваме, че \vec{E} е успоредно на x , така че за електродвижещото напрежение се получава :

$$\mathcal{E} = E_0 dy e^{i\omega t} (e^{ik(x+dx)} - e^{ikx}) = -ikE_0 dx dy e^{i(\omega t - kx)}$$

Съгласно закона за електромагнитната индукция :

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}$$

Единствената възможност $\Phi_B \neq 0$ е ако магнитното поле е перпендикулярно на чертежа, следователно в електромагнитната вълна електричното и магнитното поле са взаимно перпендикулярни и трептят перпендикулярно на посоката на разпространение на вълната.

Да запишем магнитната индукция като плоска вълна :

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

За потокут през повърхността ограничена от контура на фиг.6.1.2 б) получаваме :

$$\Phi_B = B_0 dx dy e^{i(\omega t - kx)}$$

От закона за електромагнитната индукция получаваме :

$$kE_0 = \omega B_0$$

и като вземем пред вид, че $c = \omega/k$ окончателно получаваме:

$$E_0 = cB_0 \tag{6.1}$$

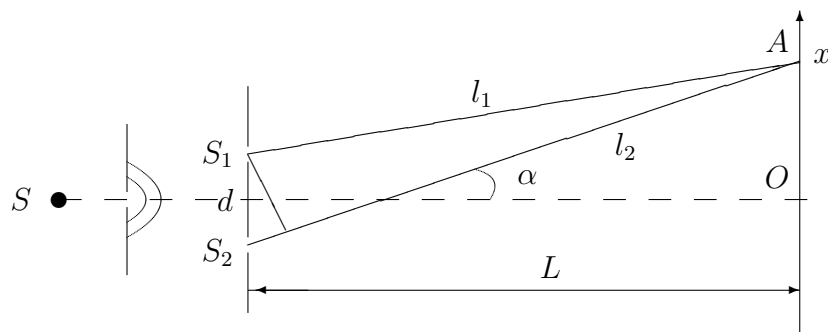
6.2 Интерференция на светлината

6.2.1 Опит на Юнг

От главата за вълни, знаем, че при разпространението на вълните създадени от два кохерентни източника в пространството се създават области, където

трештенето на частиците е слабо и области където то е силно. За да се наблюдава подобно явление необходимо е източниците да бъдат *кохерентни*. Всички източници на светлина, с които хората са разполагали до откриването на лазера са били некохерентни. Пръв Юнг е поставил експеримент, при който е 'раздвоил' един източник на светлина и е получил два кохерентни източника. Схемата на опитната постановка е показана на фиг.6.3.

Светлината излъчвана от източникът S преминава през малък отвор. Той може да се счита за източник на сферични вълни, които достигат до два малки отвора в екран. Двата отвора S_1 и S_2 стават центрове на кохерентни сферични вълни, които интерферирайки помежду си създават върху екрана A области с максимуми и минимуми, които изглеждат като тъмни и светли ивици – концентрични кръгове около центъра на екрана, който е светъл.



Фигура 6.3: Интерференция от точков източник, опит на Юнг

Условието за получаване на максимуми е разликата от пътищата да е четно число полувълни $l_2 - l_1 = 2\pi n \frac{\lambda}{2}$, където n е цяло число.

Ще считаме, че разстоянието L от отворите до екрана е голямо спрямо разстоянието между отворите d . Тогава двата лъча, които се пресичат на разстояние x_n от центъра на екрана O , могат да се смятат за успоредни и $l_2 - l_1 = d \sin \alpha$. Но $\text{tg } \alpha = \frac{x_n}{L}$, ъгълът α е малък и затова $\sin \alpha \approx \alpha$ и $\text{tg } \alpha \approx \alpha$, затова можем да запишем:

$$\frac{l_2 - l_1}{d} = \sin \alpha \approx \alpha \approx \text{tg } \alpha = \frac{x_n}{L}$$

$$\frac{l_2 - l_1}{d} = \frac{2\pi\lambda}{2d} = \frac{x}{L}$$

$$x_n = \frac{nL\lambda}{d}$$

В тази формула x_n е разстоянието от центъра на екрана до n -тия максимум. От нея се вижда, че центъра на екрана ($n = 0$) винаги е светъл. Ако вместо условието за максимум измолзуваме условието за минимум, трябва да използваме $(2n+1)\frac{\lambda}{2}$ и ще получим:

$$x_n^{\text{min}} = \frac{(2n+1)L\lambda}{2d}$$

От формулите се вижда, че положението на максимумите и минимумите зависи от дължината на вълната. Ако източникът S е на бяла светлина, която

представлява смес от светлина с различни дължини на вълните, върху екрана ще се получат на различни места ивици с различен цвят, отговарящ на съответната дължина на вълната, централния максимум ще остане бял.

Извода на горните формули направихме при предположението, че светлината се разпространява в еднородна среда. В случая, когато средата е нееднородна, дължината на вълната се променя, понеже се променя скоростта на светлината v в средата. Отношението $n = \frac{c}{v}$, където c е скоростта на светлината във вакуум, се нарича *коэффициент на пречупване* на светлината. Ако с λ_0 означим дължината на вълната във вакуум, то за λ в средата получаваме:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{2\pi c}{n\omega} = \frac{\lambda_0}{n}$$

Условието за k -тия максимум може да се запише:

$$l_2 - l_1 = 2k \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda_0}{2n}$$

$$n(l_2 - l_1) = 2k \frac{\lambda_0}{2}$$

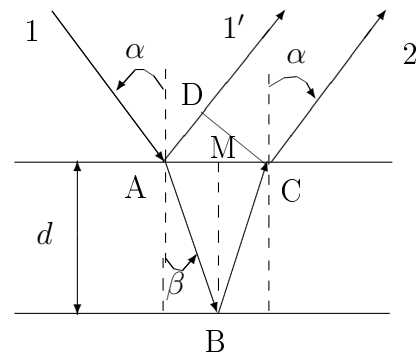
Произведението $n(l_2 - l_1)$ се нарича *оптичен път*. Затова се казва, че условието за максимум е разликата в оптичните пътища да бъде четно число полувълни, като се подразбира дължината на вълната във вакуум. Аналогично се променя условието за минимум.

В опита на Юнг кохерентните източници се получават от един чрез отвори, подобно раздвояване може да се получи по други начини – чрез огледала или призми.

6.2.2 Интерференция от тънкък слой

Интерференцията на светлината най-често се наблюдава при преминаването ѝ през тънки слоеве. На фиг.6.4 е показана схемата на възникването на интерференцията – лъча 1 пада под ъгъл α на повърхността на пластинка с успоредни стени с дебелина d и коэффициент на пречупване n . Част от него се отразява от горната повърхност (лъча 1'), а част се пречупва, след това се отразява от долната повърхност, преминава обратно през пластинката и след повторно пречупване на горната повърхност излиза под същия ъгъл α (лъча 2) успоредно на лъча 1'.

Вижда се, че двата лъча 1' и 2 изминават различни пътища. Оптическият път на лъча 2 се получава като умножим коэффициент на пречупване n по изминатия от него път $AB + BC$, а пътя на лъча 1' е AM .



Фигура 6.4: Интерференция от тънкък слой.

Триъгълника ABC е равнобедрен затова отсечката BM е и височина и медиана. От правоъгълния триъгълник ABM получаваме $AB = \frac{d}{\cos \beta}$, затова оптическия път на лъча 2 е $\Delta_2 = \frac{2dn}{\cos \beta}$. Ъгълът β се получава от закона на Снелиус:

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n}; \quad \cos \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \alpha}{n}\right)^2}; \quad \cos \beta = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha};$$

$$\Delta_2 = \frac{2dn}{\cos \beta} = \frac{2dn^2}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}.$$

Отсечката AD е оптическия път на лъча 1'. Тя се пресмята от триъгълника ACD:

$$AD = AC \sin \alpha; \quad AC = 2d \operatorname{tg} \beta; \quad AD = 2d \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \sin \alpha.$$

При отразяването от оптически по плътна среда се губи полувълна, затова оптическият път на лъча 1' е:

$$\Delta_1 = \frac{2d \sin^2 \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} + \frac{\Delta \lambda}{2},$$

затова разликата $\Delta = \Delta_2 - \Delta_1$ е:

$$\Delta = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\Delta \lambda}{2}.$$

Условието за максимум и минимум зависи от оптическия път и следователно от коефициента на пречупване, който пък зависи от дължината на вълната, следователно от цвета. Това е и причината при разливане на бензин върху вода, при което се получава тънък слой, да се наблюдават различни цветове в отразена светлина.

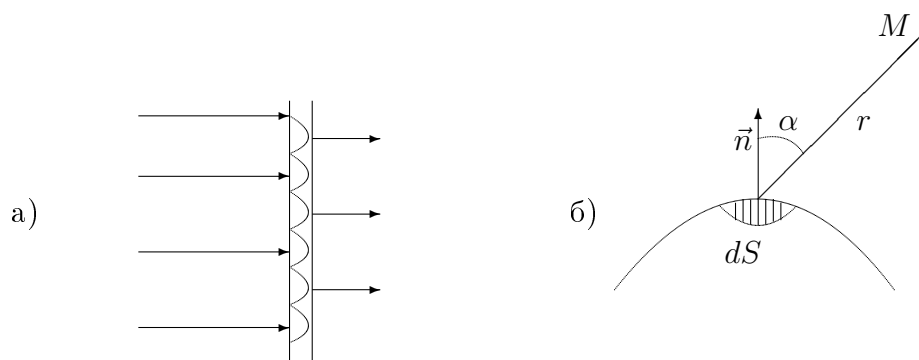
6.3 Дифракция на светлината

6.3.1 Принцип на Хюйгенс–Френел

Дифракцията е явление, което възниква при отклонението на светлината от праволинейното си разпространение при разпространение в силно нехомогенни среди, например, прегради и отвори. В резултат на дифракцията светлината се разпространява в областта на геометричната сянка. Дифракцията е следствие от интерференцията и също като нея дифракционната картина представлява съвкупност от светли и тъмни ивици.

При опита на Юнг видяхме, че малкият отвор, през който преминава светлина, може да се смята за точков източник. По общото твърдение е *принципът на Хюйгенс*, според който всяка точка до която е достигнал вълновия фронт става източник на сферични вълни, обвивката на които е новият вълнов фронт. Така на фиг.6.5 а) фронта на една плоска вълна става източник на сферични вълни, чиято

обвивка отново е равнина. Френел е дал количествено описание, според което амплитудата dA на трептенията в точка M (фиг.6.5 б) създадена от елемента dS на вълновия фронт е $dA \sim \frac{dS \cos \alpha}{r}$, а пълната амплитуда е интеграл по вълновия фронт. Извод на този принцип на основа на електромагнитната теория е направен от Хелмхолц.



Фигура 6.5: Принцип на Хюйгенс–Френел.

Принципът на Хюйгенс–Френел обяснява отклонението от праволинейното разпространение на светлината близо до краищата на прегради – вълновия фронт там се закривява, а светлинните лъчи са перпендикулярни на фронта.

С помощта на принципът на Хюйгенс–Френел може да се обясни връзката между коефициента на пречупване и скоростта на светлината. На фиг.6.1 б), стр. 91 е показана плоска вълна преминаваща от среда със скорост на светлината c във среда със скорост на светлината v . Показани са фронта на вълната B_1B_2 във втората среда и вълновата повърхност A_1A_2 в първата среда, която е била фронт на вълната в предишен момент. Вижда се, че лъчът 1 падащ под ъгъл α , изминава пътя A_1B_1 за време $t = \frac{A_1B_1}{v}$ докато за същото време $t = \frac{A_2B_2}{c}$ лъчът 2 изминава пътя A_2B_2 . От правоъгълния триъгълник $A_1B_2A_2$ получаваме $A_1A_2 = A_1B_2 \sin \alpha$, а от триъгълника $A_1B_1A_2$ $A_1B_1 = A_1B_2 \sin \beta$, затова:

$$t = \frac{A_1B_1}{v} = \frac{A_2B_2}{c}$$

$$\frac{A_1B_2 \sin \alpha}{v} = \frac{A_1B_2 \sin \beta}{c}$$

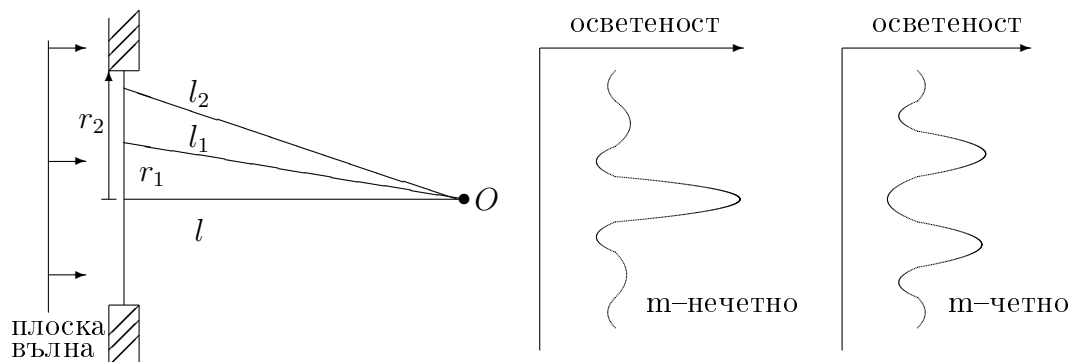
$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c}{v} = n$$

По същият начин може да се изведе и законът за отражението. При извода използвахме, че лъчите са перпендикулярни на вълновите повърхности.

6.3.2 Френелови зони, дифракция от кръгъл отвор

Ще разгледаме преминаването на светлина с плосък вълнов фронт през кръгъл отвор в преграда (фиг.6.6). Ако светлината се разпространяваше праволинейно то върху екран на разстояние l от преградата щеше да се наблюдава светло петно

с радиуса на отвора r . Поради дифракцията обаче, около центъра на изображението ще се наблюдават концентрични светли и тъмни кръгове, а самия център може да бъде както светъл така и тъмен. За да отговорим на въпроса какъв ще бъде центъра на дифракционната картина, да разбием вълновата повърхност достигнала до преградата на зони по следния начин:



Фигура 6.6: Френелови зони.

1. построяваме концентрични окръжности с център – центъра на отвора и радиус r_i на i -тата окръжност;
2. радиусът на окръжностите се определя така, че разликата между разстоянията от центъра на изображението O до две съседни окръжности е една полу дължина;
3. първият кръг се нарича първа зона на Френел, а площта между i -тата и $i + 1$ -вата окръжности i -та зона на Френел.

От правоъгълните триъгълници на фиг.6.6 получаваме:

$$l_1^2 = l_0^2 + r_1^2$$

$$l_2^2 = l_1^2 + r_2^2$$

По условие $l_1 - l = \frac{\lambda}{2}$, $l_2 - l_1 = \frac{\lambda}{2}$, и като заместим в горните уравнения получаваме:

$$l^2 + l\lambda + \lambda^2 = l^2 + r_1^2$$

$$l^2 + 2l\lambda + \lambda^2 = l^2 + r_2^2$$

Разстоянието от отвора до екрана l е много по голямо от дължината на вълната $l \gg \lambda$, затова можем да пренебрегнем λ^2 в уравненията и като извършим съкращенията получаваме:

$$r_1 = \sqrt{l\lambda}$$

$$r_2 = \sqrt{2l\lambda}$$

Аналогично за k -тата зона на Френел получаваме:

$$r_k = \sqrt{k l \lambda}$$

Съгласно принципа на Хюйгенс, всяка зона става източник на вълни. Понеже разликата от разстоянията до O е нечетно число полувълни, то вълните от съседните зони взаимно ще се гасят, а амплитудата в O е разлика от двете амплитуди. Ако означим амплитудата от k -тата зона с A_k , амплитудата в центъра на екрана O ще бъде:

$$A = A_1 - A_2 + A_3 + \dots (-1)^{k+1} A_k + \dots \quad (6.2)$$

Площите на зоните са еднакви, а амплитудите намаляват с увеличаването на номера на зоната, главно поради увеличаването на разстоянието им до центъра O . Ако предположим, че:

$$A_k = \frac{A_{k-1} + A_{k+1}}{2}$$

можем да представим A като:

$$A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1 + A_3}{2} - A_2 \right) + \dots$$

Ако нямаше преграда щяхме да получим

$$A \approx \frac{A_1}{2}.$$

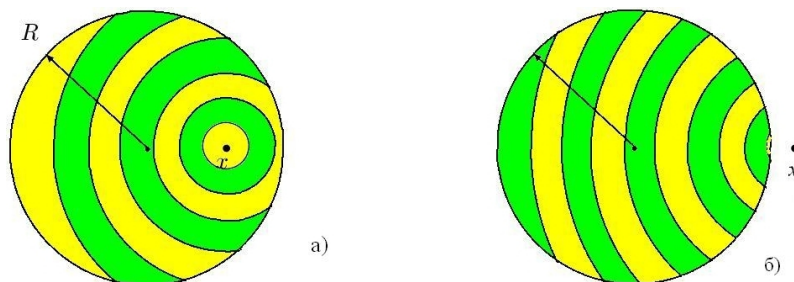
При наличието на преграда, която открива само m зони амплитудата ще бъде :

$$A = A_1 + (-1)^{m+1} A_m$$

следователно, при откриването на нечетен брой зони на Френел амплитудата в центъра на екрана се увеличава, а при четен брой ще се намалява. Ако r е радиусът на отвора от числото

$$m = \frac{r^2}{\lambda l}$$

зависи дали центърът на дифракционната картина е светъл (нечетно m) или тъмен (четно m). Той ще бъде най-светъл, когато е открита само първата зона на Френел. Амплитудата тогава ще бъде 2 пъти по-голяма отколкото без преграда и следователно яркостта на петното ще бъде 4 пъти по-голяма.



Фигура 6.7: Френелови зони гледани от точка, отместена на разстояние x от центъра: а) $x < R$ и б) $x > R$.

Нека сега да видим какъв ще бъде интензитета на светлината върху екрана на разстояние x от центъра му. Погледнато от тази точка, зоните на Френел, попадащи в отвора ще изглеждат както на фиг.6.7.

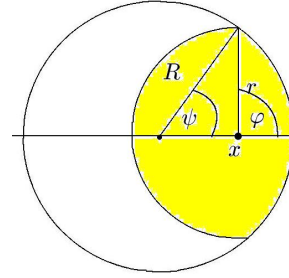
Площта заградена от Френелова окръжност, попадаща в отвора е показана в жълто на фиг.6.8, се дава от формулата:

$$A(r) = r^2 \left(\pi - \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) + R^2 \left(\psi - \frac{\sin 2\psi}{2} \right), \quad (6.3)$$

където

$$\cos \varphi = \frac{R^2 - r^2 - x^2}{2xr},$$

$$\cos \psi = \frac{R^2 - r^2 + x^2}{2xR}$$



Фигура 6.8: Изчисляване на площта.

В случая, когато Френеловата зона попада изцяло вътре в отвора, площта ѝ е $\pi \lambda l$ и не зависи от номера. И в този случай интензитета на светлината ще пресметнем по същата формула (6.2), като k -тата амплитуда A_k е равна на площта на k -тата Френелова зона, попаднала вътре в отвора. Интензитета пресмятаме като квадрата на амплитудата.

6.4 Поляризация

Поляризацията е явление проявяващо се само при напречните вълни. Откриването на такива явления при светлината още през 18 – 19 век е било доказателство за напречния характер на трептенията, получило обяснение в електродинамиката на Максвел. Видяхме, че от уравненията на Максвел следва, че при електромагнитните вълни електричният и магнитният вектор трептят перпендикулярно на посоката на разпространение на светлината. При преминаване на електромагнитна вълна през вещество електричното поле действа на всеки заряд q със сила $F = qE$, а магнитното поле с максимална сила $F_L = qvB$, където v е скоростта на заряда. Ако това е плоска вълна между двете полета има връзка $E = cB$ и следователно:

$$\frac{F_L}{F} = \frac{qvB}{qE} = \frac{qvB}{qcB} = \frac{v}{c} \ll 1,$$

понеже скоростите във веществото са много по-малки от скоростта на светлината. От формулата се вижда, че силата, с която действа магнитното поле, може да се пренебрегне. По-нататък, когато говорим за трептения ще имаме пред вид само електричния вектор.

6.4.1 Закон на Малюс

При обикновената светлина трептенията на електричния вектор могат да стават във всяка една посока, перпендикулярно на посоката на разпространение на светлината и когато това става по случаен начин тя се нарича *неполяризирана* –

такава е обикновенната светлина. Съществуват вещества, които пропускат повече вълните трептящи предимно в едно направление, отколкото в останалите, затова при преминаването на обикновена светлина през такова вещество, наречено *поляризатор*, тя излиза *поляризирана*.

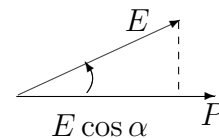
Поляризирана се нарича тази вълна, трептенията в която не се извърщват по случаен начин, а по определен закон. Ако трептенията стават:

- по една линия, то имаме *линейна поляризация*,
- ако краят на електрическия вектор се върти по окръжност то имаме *кръгова поляризация*,
- ако краят на електрическия вектор се върти по елипса то вълната поляризацията е *елиптична*,
- ако вълната е спес от наполяризирана и поляризирана светлина тя се нарича *частично поляризирана*.

Човешкото око не може да различи поляризираната от неполяризираната светлина, затова се налага да използваме уреди, за да ги разграничим. Най-лесно можем да разберем дали една светлина е поляризирана, ако я пропуснем през поляризатор. При преминаване на поляризираната светлина през втори поляризатор, наричан *анализатор* I ще зависи от ъгъла α между направлението на поляризация на двата поляризатора по *закона на Малюс*:

$$I = I_0 \cos^2 \alpha$$

Ако електричният вектор E на светлината преминала през поляризатора е ориентиран както е показано на фиг.6.4.1, и сключва ъгъл α с анализатора, то през него ще премине само проекцията му $E \cos \alpha$. Интензитетът на светлината е пропорционален на квадрата на електричния вектор, затова от $I_0 \sim E^2$ и $I \sim E^2 \cos^2 \alpha$ следва закона на Малюс.



Фигура 6.9: Извод на закона на Малюс.

6.4.2 Получаване на поляризирана светлина

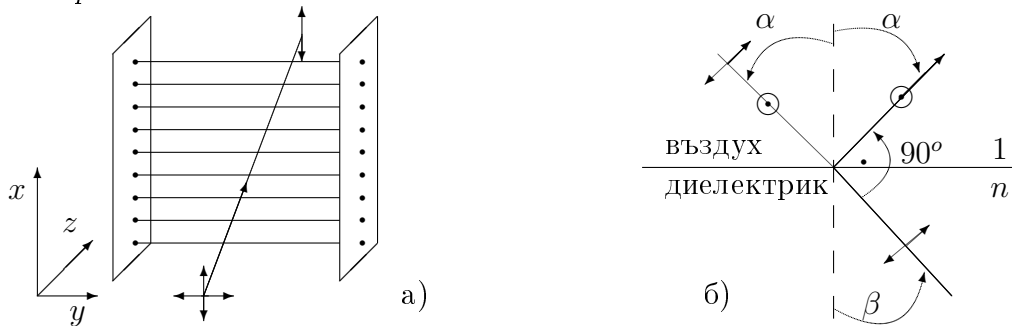
Ако неполяризирана електромагнитна вълна пада върху решетка съставена от успоредни проводници, те ще поглъщат трептенията на електрическия вектор, ориентирани по посока на проводниците и ще пропускат перпендикулярните трептения. Преминалата вълна ще е поляризирана както е показано на (фиг.6.10 а).

По подобен начин действат и *полароидите*. За приготвянето им се използва вещество, което се състои от дълги въглеродородни вериги. Веществото се разтяга, така че веригите се ориентират в направлението на разтягането, а след това се потапя в разтвор съдържащ йод. Молекулите на йода се прикрепват към въглеродородните вериги и им отдават електрони, които могат да се движат по тях, но не и перпендикулярно. Като резултат се получава решетка от ефективни проводници.

Светлината може да се поляризира и по-лесен начин. На (фиг.6.10 б) е показан лъч неполяризирана светлина, падащ върху границата между въздух и диелектрик, показани са трептенията на електричния вектор в равнината на лъчите и перпендикулярно на него. Ако ъгълът между отразения и пречупения лъч е 90° , то в отразеният не могат да се съдържат трептения от равнината на лъчите (те биха били надлъжни), а само трептения перпендикулярни на равнината на лъчите, т.е. отразеният лъч е поляризиран. Същото може да се каже за преминалия лъч. От условието $\alpha + \beta = 90^\circ$ и закона на Снелиус следва:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha}{\sin(90 - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha = n,$$

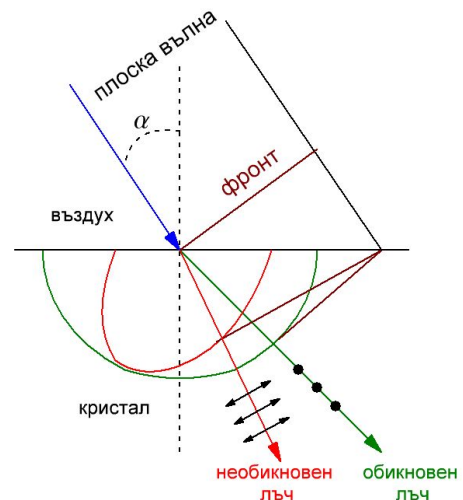
следователно ако ъгълът на падане на светлината изпълнява условието $\tan \alpha = n$ отразената светлина е напълно поляризирана. Този ъгъл се нарича *ъгъл на Брюстер*.



Фигура 6.10: а) Получаване на поляризирани електромагнитни вълни и б) поляризиране на светлината при отражение.

Поляризирането на светлината при отражение от диелектрик е причината за използването на поляризиращи очила при шофиране – поради поглъщането от очилата на отразената от пътя светлина те намаляват блесенето на Слънцето, но не пречат на неполяризираната светлина.

Друг начин да се получи поляризирана светлина е като се използва двойно лъчепречупващ кристал. В такъв кристал (например исландски шпат) светлината се разпространява с различна скорост в различни направления. На фиг. 6.11 плоска неполяризирана вълна преминава от въздух в кристал, в който светлината се разпространява с една и съща скорост в равнината успоредно на повърхността на кристала и с друга скорост, перпендикулярно на нея. Да приложим принципа на Хюйгенс–Френел към преминалата вълна. Вълновите повърхности на трептенията на електричния вектор успоредно на повърхността на кристала са сферични, затова пречупения лъч, отговарящ на обвивката на тези вълни, изпълнява закона на Снелиус и се нарича *обикновен лъч*.



Фигура 6.11: Двойно лъчепречупване.

Вълновите повърхности на трептенията на електричния вектор перпендикулярно на повърхността на кристала са елипси, чийто ексцентрицит зависи от ъгъла на падане. Тяхната обвивка образува друг вълнов фронт, който отговаря на лъч, неподчиняващ се на закона на Снелиус, наречен *необикновен*. Излизащите от такъв кристал лъчи са поляризирани взаимно перпендикулярно, а явлението се нарича *двойно лъчепречупване*. Ако кристала се изреже така, че да се предизвика пълно вътрешно отражение на единия от лъчите, то светлината преминала през кристала ще бъде напълно поляризирана.

Физически константи

Име	Символ	Стойност	Единици
Число π	π	3.14159265	
Неперово число e	e	2.718281828459	
Константа на Ойлер	$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n 1/k - \ln(n) \right) = 0.5772156649$		
Заряд на електрона	e	$1.60217733 \cdot 10^{-19}$	C
Гравитационна константа	G, γ	$6.67259 \cdot 10^{-11}$	$\text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$
Константа на фината структура	$\alpha = e^2/2hc\varepsilon_0$	$\approx 1/137$	
Скорост на светлината във вакуум	c	$2.99792458 \cdot 10^8$	m/s
Електрична проникваемост	ε_0	$8.854187 \cdot 10^{-12}$	F/m
Магнитна прониц. на вакуума	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$	H/m
$(4\pi\varepsilon_0)^{-1}$		$8.9876 \cdot 10^9$	Nm^2C^{-2}
Константа на Планк	h	$6.6260755 \cdot 10^{-34}$	Js
Константа на Дирак	$\hbar = h/2\pi$	$1.0545727 \cdot 10^{-34}$	Js
Магнетрон на Бор	$\mu_B = e\hbar/2m_e$	$9.2741 \cdot 10^{-24}$	Am^2
Боров радиус	a_0	0.52918	Å
Константа на Ридберг	Ry	13.595	eV
Комптънова дължина	$\lambda_{Ce} = h/m_e c$	$2.2463 \cdot 10^{-12}$	m
Протонна Комптънова дължина	$\lambda_{Cp} = h/m_p c$	$1.3214 \cdot 10^{-15}$	m
Редуцирана маса на H-атом	μ_H	$9.1045755 \cdot 10^{-31}$	kg
Константа на Стефан–Болцман	σ	$5.67032 \cdot 10^{-8}$	Wm^2K^{-4}
Константа на Вин	b, k_W	$2.8978 \cdot 10^{-3}$	mK
Универсална газова константа	R	8314.41	J/kmol
Число на Авогадро	N_A	$6.0221367 \cdot 10^{26}$	kmol^{-1}
Константа на Болцман	$k = R/N_A$	$1.380658 \cdot 10^{-23}$	J/K
Маса на електрона	m_e	$9.1093897 \cdot 10^{-31}$	kg
Маса на протона	m_p	$1.6726231 \cdot 10^{-27}$	kg
Маса на неутрона	m_n	$1.674954 \cdot 10^{-27}$	kg
Елементарна единица за маса	$m_u = \frac{1}{12}m(^{12}_6\text{C})$	$1.6605656 \cdot 10^{-27}$	kg
Ядрен магнетрон	μ_N	$5.0508 \cdot 10^{-27}$	J/T
Диаметър на Слънцето	D_\odot	$1392 \cdot 10^6$	m
Маса на Слънцето	M_\odot	$1.989 \cdot 10^{30}$	kg
Период на въртене на Слънцето	T_\odot	25.38	дни
Радиус на Земята	R_A	$6.378 \cdot 10^6$	m
Маса на Земята	M_A	$5.976 \cdot 10^{24}$	kg
Период на въртене на Земята	T_A	23.96	часа
Период на обикаляне на Земята	тропична година	365.24219879	дни
Астрономическа единица	AU	$1.4959787066 \cdot 10^{11}$	m
Светлинна година	ly	$9.4605 \cdot 10^{15}$	m
Парсек	pc	$3.0857 \cdot 10^{16}$	m

*

- Фарадеев кафез, 72
Хамилтонова механика, 21
Кориолисова сила, 12
Лагранжева механика, 21
Нютонова механика, 20
Първи принцип на термодинамиката, 43
абсолютно пространство, 21
абсолютно твърдо тяло, 5
абсолютно твърдото тяло, 7
абсолютно време, 21
адиабатен процес, 45
аеродинамика, 59
амплитуда, 29
антиферромагнетици, 88
барометрична формула, 51
биополе, 3
центробежна сила, 12
центростремително ускорение, 10
цилиндрична вълна, 39
циркулация на електричното поле, 84
циркулация на магнитното поле, 83
цвят, 90
честота, 29
четиримерен импулс, 28
четиримерно пространство–време, 28
число на Рейнолдс, 62
дължина на вълната, 36
диамагнетик, 87
диамагнетизъм, 86
диелектрици, 71
диелектрична проникваемост на вакуума, 66
диелектрична възприемчивост, 74
диференциално уравнение на хармоничните трептения, 30
дифракция, 40, 96
динамичен вискозитет, 55
дисипация, 34
дисперсионно съотношение, 37
дрейфова скорост, 56
двойно лъчепречупване, 103
дясно ориентирана координатна система., 7
ефект на Хол, 82
ефективно сечение, 54
еквипотенциални повърхности, 69
еластична сила, 10, 30
електричен дипол, 72
електричен диполен момент, 72
електродвижещо напрежение, 76, 84
електромагнитното взаимодействие, 11
електронна поляризация, 72
елептична поляризация, 101
енергия, 2
ентропия, 53
естествознание, 1
етер, 23, 66
фаза на трептенията, 29
фазова скорост, 37
феноменологична теория, 4, 41
феримагнетици, 88
ферромагнетици, 88
физическа кинетика, 54
физика, 2
физика на непрекъснатите среди, 35
флуид, 59
формула на Айнщайн за връзката между маса и енергия, 28
формула на Ойлер, 32
фотони, 91
фронт на вълната, 36, 97
фундаментални взаимодействия, 11
функция на разпределението, 50
геометрична оптика, 91
градиент, 16
гравитационна константа, 11
гравитационна сила, 11
гравитационно взаимодействие, 11
групова скорост, 37
хамилтониан, 21
хармонична сила, 34
хармонични трептения, 29
хидродинамика, 59
химия, 2
ъгъл на Брюстер, 102
ъглова скорост, 8, 31
идеален газ, 45

импулс, 13
индукция на електричното поле, 74
инерциална отправна система, 9
инерционната маса, 10
интензитет на електричното поле, 65
интензитет на магнитното поле, 87
интерференция, 39
интерференция от тънкък слой, 95
интерферометър на Майкелсон, 23
инвариантна величина, 14, 19
инвариантност, 23
исландски шпат, 102
йонна поляризация, 73
кинетична енергия, 15
коэффициент на повърхностно напрежение, 63
коэффициент на самодифузия, 58
коэффициент на топлопроводност, 57
коэффициент на триене, 10
кохерентни източници, 39
кохерентност, 94
кохезионно налягане, 63
количество топлина, 42
комплексна амплитуда, 32
консервативни сили, 16
константа на Болцман, 48
контактен ъгъл, 64
кръгова честота, 29
кръгова поляризация, 101
квантова оптика, 91
квазиравновесни процеси, 42
лагранжиан, 21
ламинарно течение, 61
линейна поляризация, 101
магнитен дипол, 77
магнитен момент, 77
магнитна индукция, 78
магнитна възприемчивост, 87
математическо махало, 31
материална точка, 5, 7
микроскопически теории, 4
модели, 5
мол, 45
моментната скорост, 7
мощност, 14
набла вектор, 17
начална фаза, 29
надлъжен пиезоелектричен ефект, 75
надлъжни вълни, 36, 92
налягане, 41
напречен пиезоелектричен ефект, 75
напречни вълни, 36, 92
необикновен лъч, 103
необратими термодинамични процеси, 43
неполяризирана светлина, 101
неравновесно състояние, 42
нормалното ускорение, 9
нулев принцип на термодинамиката, 41
обикновен лъч, 103
обратен пиезоелектричен ефект, 75
обща теория на относителността, 6, 10
опит на Юнг, 94
ориентационна поляризация, 73
относителна магнитна проницаемост, 87
парамагнетици, 87
период, 29
първи закон на термодинамиката, 53
първо обединение във физиката, 76
пиезоелектричен ефект, 75
пиезоелектричен модул, 75
плоска вълна, 37
полароид, 101
поле, 3, 36, 59
поляризация, 71
поляризирана светлина, 101
поляризуемост, 72
полярни оси, 75
полярно сияние, 81
потенциал, 69
потенциална енергия, 16
потенциални сили, 15
поток на електричното поле, 67
поток на магнитната индукция, 83
повърхностна плътност, 70
повърхностно напрежение, 63
правило на дясната ръка, 79
принцип на Хюйгенс–Френел, 103
принцип на Хюйгенс–Френел, 96, 97, 99
принцип на относителността на Галилей, 23

принцип на суперпозицията, 71
 принудени трептения, 34
 работа, 2, 14
 радиус на кривина, 8
 радиус-вектора, 7
 разпределение на Болцман, 51
 разпределение на Максвел, 51
 реакция на опората, 10
 редукция, 2
 релятивистка теория, 23
 резонанс, 35
 резултантна сила, 15
 селектор на скорости, 82
 сферични вълни, 38
 сила на Лоренц, 80
 сила на тежестта, 10
 сили на триене, 17
 силно взаимодействие, 11
 система на Птолемей, 6
 скорост на вълните, 36
 слабо взаимодействие, 11
 специалната теория на относителността, 23
 специфичен заряд, 81
 специфичната топлоемност, 57
 специфично съпротивление, 77
 спектограф на Бейнбридж, 82
 среден свободен пробег, 55
 стационарно, 59
 статистическа физика, 41, 54
 степени на свобода, 5
 тангенциално ускорение, 9
 температура, 4, 41, 42
 теорема на Гаус, 68, 70, 74, 83, 85
 теорема на Ньотер, 20
 термодинамична система, 53
 термодинамика, 4
 точки на Лагранж, 18
 токова линия, 59
 токова тръба, 59
 траектория, 7
 трансформации на Галилей, 23
 трансформации на Лоренц, 25
 трети закон на Нютон, 80
 трето обединение във физиката, 90
 турбулентно течение, 62
 уравнение на Бернули, 60
 уравнение на Нютон за вътрешното триене, 61
 уравнение на Ван-дер-Ваалс, 46
 уравнение за непрекъснатост на струята, 60
 уравнение за състоянието на идеалния газ, 46
 уравнения на Максвел, 65, 92
 ускорение, 7
 устойчиво равновесие, 18
 вектор на поляризацията, 73
 вълнова повърхност, 36
 вълново уравнение, 37
 възприемчивост, 73
 вискозитет, 55, 61
 втори закон на термодинамиката, 44, 53
 второ обединение във физиката, 76
 явления на пренос, 54
 закон на Ампер, 79
 закон на Био-Савар-Лаплас, 78
 закон на Джаул - Ленц, 77
 закон на Фик, 58
 закон на Фурие, 57
 закон на Кулон, 65
 закон на Ом, 77
 закон на Снелиус, 91, 103
 закон за еквивалентността между масата и енергията, 28
 закон за електромагнитната индукция, 84
 закон за отражението на светлината, 91
 закон за пречупването на светлината, 91
 закон за запазване на енергията, 17
 закон за запазване на импулса, 13
 закона на Малюс, 101
 закони на идеалните газове, 45
 заредена безкрайна равнина, 70
 затихващи трептения, 33
 затворена система, 13
 зони на Френел, 98
 жиромагнитно съотношение, 86
 неустойчиво равновесие, 18